Plans des leçons d’analyse

Sébastien Pellerin

I.U.T. de Marseille
sebastien.pellerin@univ.u-3mrs.fr

Analyse 01 – Espaces de fonctions. Exemples et applications

1. Types de convergence et fonctions continues

Définition. Convergence simple, uniforme, en moyenne, en moyenne quadratique.

Exemples. ... et pathologies

Définition. Espace des fonctions continues un compact

Exemple. Une limite simple de fonctions continues n'est pas nécessairement continue.

Proposition. *limite simple/uniforme de fonctions continues*

Corollaire. *en termes de complétude*

Application. en intégration

Théorème de Stone-Weierstrass.

Exemple. Polynômes trigonométriques

Application. Théorème de Brouwer

Théorème d'Ascoli.

Application. Exemple d'opérateur compact

Application. Théorème de Cauchy-Peano

2. Les espaces L^p

Définition des espaces L^p pour $1 \leq p \leq +\infty$.

Propriétés fondamentales.

Dual de L^p et cas particulier de L^2.
$\longrightarrow$ Dual de $L^p([0,1], dx)$ pour $1 < p < 2$

Approximation de l'identité et convolution.

Application : transformée de Fourier dans L^1.

3. L'espace L^2 et les espaces de Hilbert

Propriétés géométriques des espaces de Hilbert.

Application : séries de Fourier.

Retour sur l'exemple de l'espace L^2.

Application : transformation de Fourier.
$\longrightarrow$ Vecteurs propres de la transformation de Fourier

4. L'exemple des fonctions holomorphes

Généralités.

Définition.

Formule de Cauchy et conséquences.

Existence de primitives et analyticité.

Topologie de la converge uniforme sur les compacts.

Définition.

Théorème de Weierstrass.

Propriété de Montel.

Application : théorème de la représentation conforme.

Une structure hilbertienne : l'espace de Bergman.
$\longrightarrow$ Noyau de Bergman

Développements

Dual de L^p.

Vecteurs propres de la transformation de Fourier dans L^2.

Noyau de Bergman.

Références

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[2] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 3*, Dunod, 1996.

[3] F. Hirsch et G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[4] G. Lacombe et P. Massat, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[5] F. Bayen et C. Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*, Ellipses, 1986.

[6] A.N. Kolmogorov, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Ellipses, 1994.

Analyse 02 – Exemples de parties denses et applications

1. Quelques exemples dans $\mathbb{R}$

1.1. Approximation des réels par des rationnels.

Proposition. *Si $p \geq 2$ et $x \in [0,1[$ alors il existe une unique suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ dans $\{0,\ldots,p-1\}$ telle que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi_n}{p^n}$ et avec $\xi_n \neq p-1$ pour une infinité d'indices.*

Corollaire. *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Application. L'identité est le seul automorphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1.2. Suites de réels.

Proposition. *Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit denses, soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$.*

Application. L'ensemble $\{e^{2i\pi n\theta}; n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{S}^1$ si et seulement si θ est irrationnel ; en particulier, l'ensemble $\{\sin n; n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

On note $\{x\}$ l'unique réel de $[0,1[$ tel que $x - \{x\} \in \mathbb{Z}$.

Définition. $(x_n)_n$ est *équirépartie modulo* 1 si pour tous $0 \leq a < b < 1$, $N(a,b,n) = \operatorname{card}\{m \leq n \,; a \leq \{x_m\} \leq b\}$ est équivalent à $n(b-a)$ quand n tend vers l'infini.

Remarque. Si $(x_n)_n$ est équirépartie modulo 1 alors les $\{x_n\}$ sont denses dans $[0,1[$.

Théorème. *Soit $(x_n)_n$ une suite de réels. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *(i)* *$(x_n)_n$ est équirépartie modulo 1*
- *(ii)* *pour toute fonction 1-périodique Riemann-intégrable f, $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$*
- *(iii)* *pour toute fonction 1-périodique continue f, $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$*
- *(iv)* *pour tout $m \in \mathbb{Z}$ non nul, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{2i\pi m x_k} = o(n)$*

Exemple. Si $\theta \notin \mathbb{Q}$ alors $(n\theta)_n$ est équirépartie.

2. Complétude et complétion

2.1. Prolongement uniformément continu.

Théorème. *Si (E,d) est un espace métrique alors il existe un espace métrique complet (F,δ) et une application isométrique $j : E \to F$ tels que $j(E)$ soit dense dans F.*

Théorème. *Soit $f : A \to F$ une application uniformément continue d'une partie dense A d'un espace métrique (E,d) dans un espace complet (F,δ). Alors il existe une unique application continue $g : E \to F$ qui prolonge f ; de plus g est uniformément continue.*

Application. Intégrale de Riemann des fonctions réglées

Application. Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{T})$.

2.2. Méthodes hilbertiennes.

Définition et proposition. On dit qu'un système orthonormé $(e_i)_{i\in I}$ est une *base hilbertienne* d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- *(i)* $(e_i)_{i\in I}$ est un système orthonormé maximal,
- *(ii)* $\operatorname{Vect}(e_i)_{i\in I}$ est dense dans $\mathbb{H}$ (on dit que $(e_i)_{i\in I}$ est *totale*),
- *(iii)* $\forall x \in \mathbb{H},\ x = \displaystyle\sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$,
- *(iv)* $\forall x \in \mathbb{H},\ \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$,
- *(v)* $\forall x, y \in \mathbb{H},\ \langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle$.

Proposition. *Un espace de Hilbert est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne dénombrable.*

Exemple. Les fonctions de Hermite H_n forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Exemple. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $e_n(t) = e^{2i\pi nt}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Application (séries de Fourier)**.** Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une suite orthonormée d'un espace de Hilbert H.

- *(i)* $\widehat{x}(n) = \langle x, e_n\rangle$ est appelé $n^{\text{è}}$ *coefficient de Fourier* de $x \in H$
- *(ii)* $\sum \widehat{x}(n)e_n$ est appelée la *série de Fourier* de $x \in H$ relativement à la suite $(e_n)_n$
- *(iii)* la suite $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de H si et seulement si tout $x \in H$ est somme de sa série de Fourier *i.e.* $x = \sum_{n\geq 0} \widehat{x}(n)e_n$

Application (Espace de Bergman)**.** L'espace de Bergman du disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$ est défini par $\mathrm{A}^2(\Omega) = L^2(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega)$ et est muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(z)\overline{g(z)}dz$. Alors

- *(i)* $\mathrm{A}^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert,
- *(ii)* $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n$ est une base hilbertienne,
- *(iii)* $k(\zeta, z) = \dfrac{1}{\pi(1-\overline{\zeta}z)^2}$ est un noyau reproduisant.

2.3. Quelques applications du théorème de Baire.

Théorème de Baire. *Si (E,d) est un espace métrique complet alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses de E est dense dans E.*

Application. Soit (E,d) un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ et A un opérateur continu de E.
S'il existe X, Y denses dans E et $B : Y \to Y$ tels que pour tous $x \in X$ et $y \in Y$ on ait $A^n(x) \to 0$, $B^n(y) \to 0$ et $AB(y) = y$, alors il existe $\omega \in E$ tel que $\{A^n(\omega), n \geq 0\}$ soit dense dans E. Cette condition est vérifiée pour

(i) la dérivation sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$,
(ii) l'opérateur A de ℓ^2 défini par $Ae_0 = 0$ et $Ae_{i+1} = \lambda e_i$ pour $i \geq 0$, où $\lambda > 1$ et $(e_i)_{i\geq 0}$ est une base hilbertienne de $E = \ell^2$.

Application. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable alors f' est continue sur un ensemble dense.

3. Approximation et régularisation

3.1. Régularisation.

Proposition. *Soit f une application à support compact définie sur $\mathbb{R}^n$.*

(i) *si f est de classe $\mathcal{C}^k$ et g est intégrable à support compact alors $f \star g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et à support compact*
(ii) *si f est continue et $(\rho_n)_n$ est une unité approchée de convolution alors $\|\rho_n \star f - f\|_\infty \to 0$*
(iii) *si $f \in L^p$ $(p < +\infty)$ et $(\rho_n)_n$ est une unité approchée de convolution alors $\|\rho_n \star f - f\|_p \to 0$*

Application. Les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sont denses dans $\mathcal{C}^k$ et dans L^p pour $1 \leq p < +\infty$.

Application. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f}$ tend vers 0 à l'infini.

Application. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

3.2. Approximation polynômiale.

Théorème de Stone-Weierstrass. *Soit X un espace compact et A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ telle que : A sépare les points de X et pour tout $x \in A$ il existe $f \in A$ avec $f(x) \neq 0$. Alors A est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence uniforme.*

Application (théorème de Brouwer)**.** Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.

Théorème de Runge. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et soit A un ensemble qui a un point dans chaque composante de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$.*

(i) *On peut approcher f uniformément sur les compacts par une suite de fractions rationnelles dont les pôles sont dans A.*
(ii) *Si $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ est connexe alors f est approchable uniformément sur les compacts par une suite de polynômes.*

Application. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ avec $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ connexe et si f est holomorphe sur Ω alors $\int_\gamma f = 0$ pour tout chemin fermé γ dans Ω.

Théorème de Fejer. *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et $\sigma_N(x) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx}$ alors $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \|f - \sigma_N\|_\infty = 0$.*

Application. Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ alors il existe une unique $u : \overline{\mathbb{B}}(0,1) \to \mathbb{R}$ continue, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{B}(0,1)$ avec $u_{|\mathbb{S}^1} = f$ et $\Delta u = 0$.

Application. La transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ admet les fonctions de Hermite comme base de vecteurs propres associées aux valeurs propres $\{\pm 1, \pm i\}$.

3.3. Équicontinuité.

Proposition. *Soit D une partie dense d'un espace topologique T et soit $\mathcal{H}$ une famille équicontinue d'applications de T dans $\mathbb{C}$. Alors les topologie de la convergence uniforme sur les compacts de T et la topologie de la convergence simple sur D coïncident sur $\mathcal{H}$.*

Application. Soit T un espace métrique compact. Une partie $\mathcal{H}$ de de $\mathcal{C}(T)$ est relativement compacte si et seulement si elle est équicontinue et uniformément bornée.

Développements

Équirépartition modulo 1.

Noyau de Bergman.

Hypercyclicité.

Vecteurs propres de la transformation de Fourier.

Références

[1] F. Bayen et C. Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*, Ellipses, 1986.
[2] A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse 1*, Masson, 1997.
[3] S. Gonnord et N. Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses, 1996.
[4] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.
[5] A. Kolmogorov, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Mir Ellipses, 1994.
[6] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.
[7] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1995.
[8] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

Analyse 03 – Utilisation de la notion de compacité

1. Compacité et applications continues

Image continue d'un compact.

Théorème de Heine et applications.

Aspects séquentiels.
$\longrightarrow$ Sous-groupes compacts de $GL_(\mathbb{R})$

2. Existence d'un extremum

Une fonction continue sur un compact à valeurs réelles est bornée.

Fonction distance sur un compact.

Existence d'un minimum et d'un maximum.
$\longrightarrow$ Théorème de Jordan

3. Convolution et approximation

Fonctions plateaux.

Convolution et fonctions à support compact.

Application : résultats de densité.

Approximation par des polynômes.
$\longrightarrow$ Théorème de Brouwer-Schauder

4. Théorème d'Ascoli et applications

Application : théorème de Cauchy-Peano.

Application : théorème de Montel.
$\longrightarrow$ Théorème de représentation conforme

Application : opérateurs compacts.

Développements

Sous-groupes compacts de $GL_(\mathbb{R})$.

Théorème de Jordan.

Théorème de Brouwer-Schauder.

Théorème de représentation conforme.

Références

[1] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

[2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[3] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1985.

[4] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[5] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[6] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

Analyse 04 – Connexité. Exemples et applications

1. Espaces connexes et connexes par arcs

Connexité.

Chemins continus et connexité par arcs.

Le cas de $\mathbb{R}$.

Connexité et continuité.

Connexité et convexité.
$\longrightarrow$ Formes linéaires et connexité

2. Composantes connexes et caractère local

Ouverts connexes et connexité par arcs.

Composantes connexes.

Espaces localement connexes.

Quelques exemples.
$\longrightarrow$ Théorème de Jordan

3. Simple connexité et analyse complexe

Homotopie.

Exemples d'espaces simplement connexes.

Application en analyse complexe.

Théorème de Cauchy.

Existence de primitives.

Application : représentation conforme.
$\longrightarrow$ Théorème de représentation conforme

Développements

Théorème de Jordan.

Formes linéaires et connexité.

Théorème de représentation conforme.

Références

[1] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1985.

[2] C. Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, 1998.

[3] S. Gonnord et N. Tosel, *Calcul différentiel*, Ellipses, 1998.

[4] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[5] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[6] J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.

Analyse 05 – Espaces complets. Exemples et applications

1. Généralités

Définition et exemples.

Produit d'espaces complets.

Fermés dans un complet.

Complétude et compacité.

2. Théorèmes fondamentaux liés à la complétude

Complétion d'un espace métrique.

Prolongement uniformément continu.

Théorème de Baire et applications.
$\longrightarrow$ Critère de Kitaï

3. Structure hilbertienne

Projections.

Théorème de Riesz.
$\longrightarrow$ Dual de L^p

Bases hilbertiennes.

4. Deux applications

L'espace des fonctions holomorphes.

Convergence uniforme sur les compacts.

Théorème de Weierstrass.

Espace de Bergman.
$\longrightarrow$ Noyau de Bergman

Applications en analyse numérique.

Développements

Dual de L^p.

Noyau de Bergman.

Critère de Kitaï.

Références

[1] F. Bayen et C. Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*, Ellipses, 1986.

[2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[3] S. Gonnord et N. Tosel, *Calcul différentiel*, Ellipses, 1998.

[4] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[5] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[6] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

Analyse 06 – Utilisation de théorèmes de point fixe

1. Existence d'un point fixe et compacité

1.1. Applications continues.

Théorème de Brouwer. *Toute application continue de $\overline{\mathbb{B}^n}$ dans $\overline{\mathbb{B}^n}$ admet un point fixe.*

Application. Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue telle que $\langle V(x), x\rangle < 0$ pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ alors il existe $x_0 \in \mathbb{B}^n$ tel que $V(x_0) = 0$.

Application. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à coefficients positifs alors A admet un vecteur propre à coefficients positifs associé à une valeur propre positive.

Théorème de Schauder. *Soit C un convexe fermé d'un espace normé et $f : C \to C$ une application continue. Si $\overline{f(C)}$ est compact alors f admet un point fixe.*

Application (Cauchy-Arzela-Peano)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathcal{U}$, le problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, admet au moins une solution locale.

1.2. Famille d'applications continues.

Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

Proposition. *Si K est un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $u(K) \subset K$ pour tout $u \in G$, alors il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$.*

Proposition. *Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $PGP^{-1} \subset \mathcal{O}(n)$.*

1.3. Applications Lipschitziennes.

Proposition. *Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in E$ distincts. Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$, obtenu comme limite de la suite $(f^{[n]}(x_0))_{n\geq 0}$ où $x_0 \in E$ est quelconque.*

Remarques. L'application f n'est pas forcément contractante (par exemple sin sur $[0, 1]$). L'hypothèse de compacité est nécessaire (par exemple $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ n'a pas de point fixe sur $\mathbb{R}$).

2. Point fixe d'une application contractante

2.1. Les énoncés.

Soit (E, d) un espace métrique complet.

Théorème de Picard-Banach. *Soit $f : E \to E$ une application contractante. Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$, obtenu comme limite de la suite $(f^{[n]}(x_0))_{n\geq 0}$ où $x_0 \in E$ est quelconque.*

Corollaire. *Soit $f : E \to E$ une application dont une itérée $f^{[p]}$ est contractante. Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$, obtenu comme limite de la suite $(f^{[n]}(x_0))_{n\geq 0}$ où $x_0 \in E$ est quelconque.*

Remarque. La fonction sin n'est pas contractante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ mais admet un point fixe unique. Cependant la suite des itérés converge lentement.

Exemple. On note E l'espace des applications continues $f : [0, 1] \to [0, 1]$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ muni de la norme $\| \|_\infty$. Pour tout $f \in E$, on définit $Tf \in E$ par

$$Tf(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}f(3t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2}f(3t-1) + \frac{3}{4} & \text{si } \frac{1}{3} < t \leq \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4}f(3t-2) + \frac{1}{4} & \text{si } \frac{2}{3} < t \leq 1 \end{cases}$$

alors $T : E \to E$ admet un point fixe φ qui est une application continue sur $[0, 1]$ mais nulle part dérivable.

Contre-exemple. L'hypothèse E complet est nécessaire (par exemple $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ est contractante sur $[0, 1[$ mais n'a pas de point fixe).

2.2. Application aux équations différentielles.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue.

Théorème de Cauchy-Lipschitz global. *Si f est globalement Lipschtizienne en la seconde variable alors le problème de Cauchy $y' = f(t, x)$, $y(t_0) = x_0$, admet une unique solution définie sur I.*

Exemple. L'équation $u'' = -\sin u, u(0) = a, u'(0) = b$, admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz local. *Si f est localement Lipschtizienne en la seconde variable alors le problème de Cauchy $y' = f(t, x)$, $y(t_0) = x_0$, admet une unique solution maximale.*

2.3. Application au calcul différentiel.

Théorème d'inversion locale. *Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in \mathcal{U}$ tel que $\det J_f(a) \neq 0$. Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ de a et un voisinage $\mathcal{V}$ de $f(a)$ tels que $f : \mathcal{U}' \to \mathcal{V}$ soit un difféomorphisme.*

Corollaire (théorème d'inversion globale)**.** *Soit $f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ de classe $\mathcal{C}^1$ et injective. Si $\det J_f(a) \neq 0$ pour tout $a \in \mathcal{U}$ alors f est un difféomorphisme.*

Corollaire (théorème des fonctions implicites)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si $(a, b) \in \Omega$ vérifie $f(a, b) = 0$ et $\partial_2 f(a, b)$ inversible alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U} \subset \Omega$ de (a, b), un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de a et une application $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que*

$$f(x, y) = 0 \text{ et } (x, y) \in \mathcal{U} \iff \varphi(x) = y \text{ et } x \in \mathcal{V}.$$

De plus on a $d\varphi_a = -\partial_2 f_{a,b}^{-1} \circ \partial_1 f_{a,b}$.

3. Application à la résolution d'équations

3.1. Famille de points fixes.

Proposition. *Soit E et F deux espaces normés dont le premier est complet et $f : E \times F \to E$ une application continue, contractante en la première variable.*

- (i) *Pour tout $\lambda \in F$, il existe un unique $x_\lambda \in E$ tel que $f(x_\lambda, \lambda) = x_\lambda$.*
- (ii) *L'application $F \to E, \lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.*

(iii) *Si $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, f est $\mathcal{C}^1$ et s'il existe $k < 1$ tel que $\|\partial_1 f(x,\lambda)\| \leq k$ alors l'application $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n, \lambda \mapsto x_\lambda$ est $\mathcal{C}^1$.*

Exemple. Le système

$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1\ ,\ y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}$$

définit deux applications $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$.

3.2. Équations intégrales.

Proposition. *Soit $K : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ et $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues.*

(i) *Si $\sup\limits_{a\leq s,t\leq b} |K(s,t| < \frac{1}{b-a}$ alors l'équation $x(t) = \varphi(t) + \displaystyle\int_a^b K(s,t)x(s)ds$, pour $t \in [a,b]$, admet une unique solution continue $x : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

(ii) *L'équation $x(t) = \varphi(t) + \displaystyle\int_a^t K(s,t)x(s)ds$, pour $t \in [a,b]$, admet une unique solution continue $x : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

3.3. Résolution de $f(x) = 0$.

Proposition. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et a un point fixe de f.*

(i) *Si $|f'(a)| < 1$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ soit stable par f et, pour tout $x_0 \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, $x_n = f^{[n]}(x_0)$ tend vers a. De plus :*
- *si $f' \neq 0$ sur $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ et $x_0 \neq a$ alors $x_n \neq a$ et $x_{n+1} - a \sim f'(a)(x_n - a)$;*
- *si f est $\mathcal{C}^2$, $f' = 0$, $f'' \neq 0$ sur $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ et $x_0 \neq a$ alors $x_n \neq a$ et $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2}(x_n - a)^2$.*

(ii) *Si $|f'(a)| > 1$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, $x_n = f^{[n]}(x_0)$ sort de $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ pour n assez grand.*

Proposition (méthode de Newton)**.** *Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$. On pose*

$$x_n = F^{[n]}(x_0) \text{ où } F(t) = t - \frac{f(t)}{f'(t)}.$$

Alors f admet un unique zéro a et il existe un intervalle $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ stable par F tel que, pour tout $x_0 \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, il existe $0 < C < \frac{1}{\varepsilon}$ avec

$$C\,|x_{n+1} - a| \leq (C\varepsilon)^{2^n}.$$

Développements

Deux applications du théorème de Brouwer.

Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Théorème d'inversion locale.

Références

[1] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

[2] P. Donato, *Calcul différentiel pour la licence*, Dunod, 2000.

[3] F. Guénard et H. Lemberg, *Deux applications du théorème du point fixe*, R.M.S. janvier 1998.

[4] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[5] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.

Analyse 07 – Prolongements de fonctions. Applications

1. Prolongement continu

1.1. **Prolongement en un point, interpolation.**

1.2. **Prolongement à partir d'une partie fermée.**
⟶ Théorème de Tietze-Urysohn

1.3. **Prolongement à partir d'une partie dense.**

1.4. **Prolongement à partir d'un sous-espace vectoriel.**

2. Prolongement et dérivées

2.1. **Prolongement en un point, interpolation.**

2.2. **Utilisation de fonctions plateau.**
⟶ Théorème de Borel

2.3. **Équations différentielles et solutions maximales.**

2.4. **Solutions d'E.D.P. et prolongement par périodicité.**

3. Prolongement holomorphe

3.1. **Singularité au bord et séries entières.**
⟶ Théorème tauberien fort

3.2. **Zéros isolés et applications.**

3.3. **Exemples de prolongement analytique.**
⟶ Prolongement de la fonction ζ

Développements

Théorème de Tietze.

Théorème de Borel.

Théorème tauberien fort.

Prolongement de la fonction ζ.

Références

[1] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[2] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[3] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

[4] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.

[5] Rudin

Analyse 08 – Utilisation de la continuité uniforme en analyse

1. Lien avec la compactié

1.1. **Théorème de Heine.**

1.2. **Construction de l'intégrale de Riemann.**
⟶ Sur l'intégrale de Riemann

1.3. **Application aux fonctions périodiques.**

2. Prolongement de fonctions

2.1. **Théorème du prolongement uniformément continu.**

2.2. **Applications.**

2.3. **Cas des applications linéaires et Hahn-Banach.**

3. Approximation de fonctions continues

3.1. **Module de continuité.**

3.2. **Polynômes de Berstein et approximation polynômiale.**

3.3. **Convolution.**
⟶ Théorème de Fejer

4. Équicontinuité

4.1. **Définition.**

4.2. **Théorème d'Ascoli.**

4.3. **Application : Cauchy-Peano.**

4.4. **Application : Montel.**

Développements

Théorème de Fejer.

Sur l'intégrale de Riemann.

Références

[1] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse*, Dunod, 1996.

[2] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 1996.

[3] B. Gostiaux, *Cours de Mathématiques spéciales*, P.U.F., 1993.

[4] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[5] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[6] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

Analyse 09 – Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités

1. Réunion dénombrable

1.1. **Résultats fondamentaux.**

1.2. **Principe des tiroirs.**

1.3. **Théorème de Borel-Cantelli.**

1.4. **Ensembles négligeables.**

2. Suites

2.1. **Caractérisations séquentielles dans les espaces métriques.**
⟶ Suites équiréparties

2.2. **Espaces séparables et bases hilbertiennes.**
⟶ Noyau de Bergman

2.3. **Point fixe et approximations successives.**

2.4. **Échantillons.**

3. Théorème de Baire et applications

3.1. **Énoncé.**

3.2. **Applications.**
⟶ Critère de Kitaï

4. Extraction diagonale

4.1. $\mathbb{R}$ **n'est pas dénombrable.**

4.2. **Compacité d'un produit de compacts.**

4.3. **Recherche de sous-suites.**
⟶ Théorème de Helly

Développements

Suites équiréparties.

Espace de Bergman.

Critère de Kitaï.

Théorème de Helly.

Références

[1] G. Lacombe et P. Massat, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[2] S. Gonnord et N. Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses, 1996.

[3] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[4] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

[5] Rudin

Analyse 10 – Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F, G désignent des e.v.n. et T est une application linéaire de E dans F.

1. Généralités

Définition. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) T est continue sur E
- (ii) T est continue en 0
- (iii) T est uniformément continue
- (iv) T est Lipschitzienne
- (v) T est bornée sur la sphère unité $\mathbb{S}$
- (vi) T est bornée sur la boule unité fermée $\mathbb{B}$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F (et $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$).

Exemple. $L^1 \to L^1, f \mapsto \widehat{f}$ est continue.

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\left\|\sum a_i X^i\right\| = \max |a_i|$ alors $T : P \mapsto P'$ n'est pas continue.

Remarque. Si E est de dimension finie alors toute application linéaire de E dans F est continue. Sinon, il existe toujours une application linéaire non continue.

Proposition. *$\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel ; de plus, si $S \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $|\!|\!|S \circ T|\!|\!| \leq |\!|\!|S|\!|\!| \cdot |\!|\!|T|\!|\!|$.*

Proposition. *On définit une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$ par*

$$\begin{aligned} |\!|\!|T|\!|\!| &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \inf\{c > 0 ; \forall x, \|T(x)\| \leq c\,\|x\|\} \end{aligned}$$

Exemple. Soit $E = L^p$ muni de $\| \ \|_p$, $g \in E$ fixée et $T(f) = \int fg$ alors $|\!|\!|T|\!|\!| = \|g\|_q$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Exemple. Soit $E = c_0$ muni de $\| \ \|_\infty$ et $T(u) = \sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ alors $|\!|\!|T|\!|\!| = 1$ mais cette norme n'est pas atteinte.

Exemple. Si $E = \mathbb{R}^n$ est muni de la norme $\| \ \|_2$ alors la norme induite sur $\mathcal{L}(E)$ est donnée par $|\!|\!|T|\!|\!|_2 = \sqrt{\rho(T^*T)}$.

Application. Si $|\!|\!|T|\!|\!| < 1$ alors $\mathrm{id} - T$ est inversible d'inverse $\sum T^n$.

Proposition. *Si F est complet alors $\mathcal{L}(E,F)$ est complet pour $|\!|\!| \ |\!|\!|$.*

Exemple. Le dual $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ de E est complet.

2. Dualité et formes linéaires

On suppose ici que T est une forme linéaire sur E.

Proposition. *On a équivalence entre*

- (i) *T est continue,*
- (ii) $\ker T$ *est fermé,*
- (iii) $E \setminus \ker T$ *n'est pas connexe par arcs.*

Remarque. Si $T \in E'$ alors $d(x, \ker T) = \frac{|T(x)|}{|\!|\!|T|\!|\!|}$.

Théorème de Hahn-Banach (version analytique)**.** *Soit M un sous-espace de E et $\varphi \in M'$. Alors il existe $T \in E'$ qui prolonge φ et telle que $|\!|\!|T|\!|\!| = |\!|\!|\varphi|\!|\!|$.*

Application. Soit M un sous-espace fermé de E et $x_0 \notin E$. Il existe $T \in E'$ nulle sur M et telle que $|\!|\!|T|\!|\!| = 1$ et $d(x_0, M) = T(x_0)$.

Application. Un sous-espace M de E est dense si et seulement si tout $\varphi \in E'$ nulle sur M est identiquement nulle.

Application. $\|x\| = \sup\limits_{|\!|\!|T|\!|\!|\leq 1} \|T(x)\|$

Il s'ensuit que E est isométrique à un sous-espace de E''.

Théorème de Hahn-Banach (version géométrique)**.** *Soit M un sous-espace de E et A un ouvert convexe non vide de E tel que $M \cap A = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan linéaire fermé H de E tel que $M \subset H$ et $H \cap A = \emptyset$.*

Corollaire. *Soit A un convexe fermé de E et K un convexe compact de E tels que $A \cap K = \emptyset$. Alors il existe $T \in E'$ telle que :* $\sup\limits_{x\in K} \mathrm{Re}\ T(x) < \inf\limits_{y\in A} \mathrm{Re}\ T(y)$.

Corollaire. *Soit K une partie compacte de E. Alors $x \in E$ est adhérent à l'enveloppe convexe de K si et seulement si pour tout $T \in E'$, on a :* $\mathrm{Re}\ T(x) \leq \sup\limits_{y\in K} \mathrm{Re}\ T(y)$.

Application. L'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité pour $|\!|\!| \ |\!|\!|_2$.

Définition. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ de E converge *faiblement* vers x si $\ell(x_n) \to \ell(x)$ pour tout $\ell \in E'$.
On dit qu'une suite $(\ell_n)_n$ de E' converge *faiblement-$\star$* vers ℓ si $\ell_n(x) \to \ell(x)$ pour tout $x \in E$.

Théorème de Banach-Alaoglu. *Si E est séparable alors la boule unité fermée de E' est faiblement-$\star$ compacte.*

3. Cas des espaces de Banach

Théorème de Banach-Steinhaus. *Si E est de Banach et si $(f_i)_{i\in I}$ est dans $\mathcal{L}(E,F)$ et vérifie* $\sup\limits_{i\in I} \|f_i(x)\| < \infty$ *pour tout $x \in E$, alors* $\sup\limits_{i\in I} |\!|\!|f_i|\!|\!| < \infty$.

Application. Si une suite $(x_n)_n$ de E tend faiblement vers x alors $(x_n)_n$ est fortement bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

Application. Il existe une fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0.

Théorème de l'application ouverte. *Si E et F sont de Banach et $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est surjective alors T est ouverte.*

Remarque. L'hypothèse de complétude est nécessaire : prendre $E = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ normé par $\| \ \|_\infty$ et l'application linéaire continue bijective $(u_n)_n \mapsto (\frac{u_n}{n})_n$ (de norme 1).

Corollaire (Banach). *Si E et F sont de Banach et $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.*

Corollaire (graphe fermé). *Si E et F sont de Banach et si le graphe de T est fermé alors $T \in \mathcal{L}(E,F)$.*

Application. Soit F un sous-espace fermé d'un espace de Banach, on a équivalence entre :

(i) F possède un supplémentaire fermé

(ii) il existe une projection continue de E sur F

Application. $L^1([0,2\pi]) \to c_0(\mathbb{Z}), f \mapsto (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est continue, injective, de norme 1 mais n'est pas surjective.

4. Cas des espaces de Hilbert

On note H un espace de Hilbert.

4.1. Théorème de Riesz.

Théorème de Riesz. *Pour tout $T \in H'$, il existe $a \in H$ unique tel que $T = \langle a, \cdot\rangle$. De plus, on a $|||T||| = \|a\|$.*

Exemple. $g \mapsto \int fg$ est une isométrie de L^2 sur L^2.

Application. Dual de L^p en mesure finie pour $1 < p < 2$.

Application. Définition de l'adjoint T^* de T.

4.2. Opérateurs compacts.

Définition. On dit que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est un *opérateur compact* si l'image par T de la boule unité fermée de E est relativement compacte dans F.

Exemple. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$ et $K : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ continue, on pose $T(f)(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)dt$ alors T est un opérateur compact.

Exemple. Si H est séparable et si $T \in \mathcal{L}(H)$ est tel qu'il existe une base orthonormée $(e_n)_n$ de H vérifiant $\sum \|T(e_n)\|^2$ converge, alors T est un opérateur compact.

Contre-exemple. Soit $E = \ell^2$ et $T((x_n)_n) = (y_n)_n$ où $y_m = \sum \frac{x_n}{n+m}$ alors T n'est pas un opérateur compact.

Proposition. *Si H est séparable alors $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur compact si et seulement si $\|T(x_n)\| \to 0$ pour toute suite $(x_n)_n$ tendant faiblement vers 0.*

Proposition. *Tout opérateur compact sur H est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Proposition (alternative de Fredholm). *Si T est un opérateur compact sur H alors $S = \mathrm{id} - T$ est injectif si et seulement si S est surjectif.*

Application. Étude de l'équation intégrale de Fredholm.

4.3. Analyse de Fourier dans L^2.

$\longrightarrow$ Vecteurs propres de la transformation de Fourier

---

Développements

Caractérisation de la continuité d'une forme linéaire.

Enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$.

Dual de L^p.

Vecteurs propres de la transformation de Fourier.

Références

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[2] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 1998.

[3] Y. Sonntag, *Topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses, 1998.

[4] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

Analyse 11 – Utilisation de la dimension finie en analyse

1. Propriétés automatiques

1.1. **Équivalence des normes.**

1.2. **Continuité.**

1.3. **Compacité.**

1.4. **Application : théorème de Weierstrass.**
⟶ Théorème de Brouwer

2. Structure hilbertienne

2.1. **Produit scalaire et polynômes orthogonaux.**

2.2. **Autour de la complétude.**

2.3. **Projections.**
⟶ Sous-groupes compacts de $GL(E)$
⟶ De Brouwer à Schauder...

3. Approximation polynômiale

3.1. **Interpolation de Lagrange.**

3.2. **Autres méthodes d'interpolation.**

3.3. **Polynômes de meilleure approximation.**

3.4. **Méthodes de quadrature.**
⟶ Méthode de Gauss et polynômes orthogonaux

Développements

Théorème de Brouwer-Schauder.

Sous-groupes compacts de $GL(E)$.

Méthode de Gauss et polynômes orthogonaux.

Références

[1] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

[2] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 1996.

[3] S. Gonnord et N. Tosel, *Calcul différentiel*, Ellipses, 1998.

[4] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

[5] J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.

Analyse 12 – Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie

1. Orthogonalité et orthonormalisation

Identités remarquables.

Algorithme de Gram-Schmidt.

Exemple de systèmes orthogonaux.
⟶ Fonctions de Hermite

Dimension finie et angles.

2. Projection

Le théorème de projection.

Projection orthogonale.
⟶ Méthodes de gradient

Application aux probabilités.

3. Dualité et théorème de Riesz

Le théorème de Riesz.

Application en intégration.
⟶ Dual de L^p

Application en analyse numérique.

Application aux probabilités.

4. Bases hilbertiennes

Caractérisation des bases hilbertiennes.

Isométrie entre H et ℓ^2.

Exemples de systèmes.
⟶ Base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ et transformée de Fourier

Un exemple d'utilisation de base hilbertienne : l'espace de Bergman.
⟶ Noyau de Bergman

Développements

Vecteurs propres de la transformation de Fourier dans L^2.

Espace de Bergman.

Dual de L^p.

Méthodes de gradient.

Références

[1] F. Bayen et C. Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*, Ellipses, 1986.

[2] P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1982.

[3] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 1996.

[4] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[5] A.N. Kolmogorov, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Ellipses, 1994.

[6] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[7] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

Analyse 13 – Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

1. Définitions

On note $\mathbb{H}$ un espace préhilbertien non réduit à $\{0\}$, de norme $\| \ \|$ associée à un produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$.

Définition. On appelle *système orthonormée* toute famille $(e_i)_{i\in I}$ telle que $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j \in I$.

Proposition. *Si $(e_i)_{i\in I}$ est un système orthonormé alors pour tout $x \in \mathbb{H}$, on a $\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.*

Définition. La famille $(\xi_i)_{i\in I}$ définie par $\xi_i = \langle x, e_i\rangle$ est appelée famille des *coefficients de Fourier* de x par rapport à $(e_i)_{i\in I}$.

Proposition (Gram-Schmidt)**.** *Tout système libre dénombrable s'orthonormalise.*

Définition. Soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormé. On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une *base hilbertienne* s'il s'agit d'un système orthonormé maximal.

Proposition. *Soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormé. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(e_i)_{i\in I}$ *est une base hilbertienne,*

(ii) $\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}$ *est dense dans* $\mathbb{H}$ *(on dit que* $(e_i)_{i\in I}$ *est totale),*

(iii) $\forall x \in \mathbb{H},\ x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i,$

(iv) $\forall x \in \mathbb{H},\ \|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2,$

(v) $\forall x, y \in \mathbb{H},\ \langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle.$

Proposition. *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.*

Corollaire. $\mathbb{H}$ *admet une base hilbertienne dénombrable si et seulement si* $\mathbb{H}$ *est séparable.*

Exemple. L'espace $\mathcal{C}$ des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues a-périodiques, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)g(x)dx$, admet pour base hilbertienne la famille : $1, \sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{a}x, \sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{a}x, \dots, \sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{a}nx, \sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{a}nx, \dots$

Exemple. L'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i\overline{y_i}$ admet pour base hilbertienne la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où la suite e_n est nulle sauf le n-è terme qui vaut 1.

Proposition. *Tout espace de Hilbert séparable est isométrique à $\ell^2(\mathbb{N})$.*

2. L'espace L^2 : quelques exemples de bases hilbertiennes

Exemple. Les polynômes de Laguerre, définis sur $]0, +\infty[$ par $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$, forment une base hilbertienne de $L^2(]0, +\infty[, e^{-x}dx)$.

Exemple. Une base hilbertienne de $L^2(]0, 1[, dx)$ est donnée par la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $e_n(x) = e^{2i\pi nx}$.

Application (théorie L^2 des séries de Fourier)**.** Pour tout $f \in L^2(]0, 1[)$, on note $c_n(f) = \int_0^1 f(x)e^{-2i\pi nx}dx$, alors $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ au sens L^2.

Exemple. Les polynômes de Legendre, définis sur $[-1, 1]$ par $P_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}((x^2 - 1)^n)$, forment une base hilbertienne de $L^2([-1, 1], dx)$.

Exemple. Les polynômes de Hermite, définis sur $\mathbb{R}$ par $P_n(x) = e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$, forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$.

Application. Les fonctions de Hermite définies par

$$h_n(x) = \frac{P_n(x)e^{-x^2/2}}{\left\|P_n(x)e^{-x^2/2}\right\|_{L^2}}$$

sont les fonctions propres de la transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ associées aux valeurs propres $\pm\sqrt{2\pi}$, $\pm i\sqrt{2\pi}$.

Exemple. Les polynômes de Tchebitchef, définis sur $[-1, 1]$ par $T_0(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\pi}}$ et $T_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos(n\mathrm{Arccos}x)$, forment une base hilbertienne de $L^2([-1, 1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$.

Exemple. Les fonctions de Haar, définies sur $[0, 1]$ par $H_0 = 1$ et, pout tout $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq 2^n$, $H_{2^n+k-1}(x) = \sqrt{2^n}$ si $(2k - 2)2^{-n-1} < x < (2k - 1)2^{-n-1}$, $-\sqrt{2^n}$ si $(2k - 1)2^{-n-1} < x < (2k)2^{-n-1}$ et 0 sinon, forment une base hilbertienne de $L^2([0, 1], dx)$.

Application. Si f est continue alors $\sum_{p\in\mathbb{N}} \langle f, H_p\rangle H_p$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

3. Applications

3.1. **Noyau de Bergman.** On note Ω un ouvert strict de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ le disque unité.

Définition. L'*espace de Bergman* sur Ω est défini par $\mathrm{A}^2(\Omega) = L^2(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega)$ et est muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(z)\overline{g(z)}dz$.

Proposition. $\mathrm{A}^2(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

Proposition. *Une base hilbertienne de* $\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$ *est donnée par* $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n$.

Remarque. On en déduit une base hilbertienne de $\mathrm{A}^2(\Omega)$ pour Ω simplement connexe : $E_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\varphi(z)^n\varphi'(z)$ où $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ est un biholomorphisme.

Définition. Le *noyau de Bergman* sur $\mathbb{D}$ est l'application k définie pour $\zeta, z \in \mathbb{D}$ par $k(\zeta, z) = \dfrac{1}{\pi(1 - \overline{\zeta}z)^2}$.

Remarque. On en déduit l'expression du noyau de Bergman sur Ω simplement connexe :

$$K(\zeta, z) = \overline{\varphi'(\zeta)}\varphi'(z)k(\varphi(\zeta), \varphi(z))$$

où $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ est un biholomorphisme.

Application. Si K est construit sur Ω simplement connexe alors on peut expliciter les biholomorphismes de Ω sur $\mathbb{D}$.

3.2. **Opérateurs compacts.**

Définition. On dit que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est un *opérateur compact* si l'image par T de la boule unité de $\mathbb{H}$ est relativement compacte.

Proposition. *Si $\mathbb{H}$ est séparable et T est autoadjoint compact alors $\mathbb{H}$ admet une base hibertienne formée de vecteurs propres de T.*

Définition. On dit que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est un *opérateur de Hilbert-Schmidt* s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{H}$ telle que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2$ converge.

Proposition. *Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.*

Proposition. *Si $L^2(X, \mu)$ est séparable alors T est de Hilbert-Schmidt si et seulement s'il existe $k \in L^2(X\times X)$ tel que, pour tout $f \in L^2(X)$ et tout $x \in X$, on ait $Tf(x) = \int_x f(y)k(x, y)dy$.*

Développements

Polynômes de Hermite et application.

Noyau de Bergman.

Références

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[2] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 3*, Dunod, 1996.

[3] F. Hirsch et G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[4] G. Lacombe et P. Massat, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[5] F. Bayen et C. Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*, Ellipses, 1986.

[6] A.N. Kolmogorov, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Ellipses, 1994.

Analyse 14 – Application des théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites

1. Énoncés des théorèmes

Théorème d'inversion locale.

Théorème d'inversion globale.

Théorème des fonctions implicites.

2. Propriétés locales

2.1. Sur les applications ouvertes.

2.2. Difféomorphismes locaux.

2.3. Changement de variables.

3. Exemples de résolution d'équations

3.1. Systèmes 2×2 non linéaires.

3.2. Méthode de Newton.

3.3. Existence d'un point fixe.

$\longrightarrow$ Théorème de Brouwer

3.4. Équations différentielles non résolues.

4. Application aux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

4.1. Extrema liés.

$\longrightarrow$ Théorème des extrema liés et application

4.2. Définitions des sous-variétés et exemples.

4.3. Espace tangent et positions relatives.

Développements

Théorème de Brouwer.

Théorème des extrema liés et application.

Références

[1] P. Donato, *Calcul différentiel pour la licence*, Dunod, 2000.

[2] S. Gonnord et N. Tosel, *Calcul différentiel*, Ellipses, 1998.

[3] B. Gostiaux, *Cours de Mathématiques spéciales*, P.U.F., 1993.

[4] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[5] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[6] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.

Analyse 15 – Différentiabilité d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$.

1. Généralités sur la différentiabilité

Définition. On dit que f est *différentiable en* $a \in \mathcal{U}$ s'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Cette application est unique et on la note df_a.

Exemple. $x \mapsto \|x\|^2$

Remarque. La notion de différentiabilité en a est indépendante de la norme choisie.

Application. Théorème de Liapounov

Définition. Si f est différentiable en tout $a \in \mathcal{U}$, on dit que f est *différentiable sur* $\mathcal{U}$ et on appelle *application différentielle* de f l'application

$$df : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p), a \mapsto df_a.$$

Proposition. *Une application différentiable en $a \in \mathcal{U}$ est continue en $a \in \mathcal{U}$.*

Proposition. (i) *La différentiation est un opérateur linéaire.*
(ii) *Si $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ et $g : \mathcal{V} \to \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^q$ sont telles que f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et g est différentiable en $f(a) \in \mathcal{V}$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et*

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$$

Exemple. L'application $\varphi : GL_k(\mathbb{R}) \to GL_k(\mathbb{R}), u \mapsto u^{-1}$ est différentiable sur $GL_k(\mathbb{R})$ et pour tout $h \in GL_k(\mathbb{R})$

$$d\varphi_u(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}.$$

Théorème de la moyenne. *Si f est différentiable sur $\mathcal{U}$ et si $[a, b] \subset \mathcal{U}$ alors*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in [a,b]} \|df_x(b-a)\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in [a,b]} \|df_x\|$$

Si $p = 1$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis.

Application. Si $\mathcal{U}$ est connexe et si $df \equiv 0$ sur $\mathcal{U}$ alors f est constante sur $\mathcal{U}$.

Application (lemme de Sard)**.** Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ est différentiable de différentielle continue alors l'image par f de l'ensemble des $x \in \mathcal{U}$ tels que $\mathrm{rg} df_x < p$ est de mesure nulle.

2. Différentielles partielles et différentielles d'ordre supérieur

On pose $d^1 f = df$ et, pour tout $k \geq 1$, $d^{k+1} f = d(d^k f)$.
Définition. L'application $d^k f$ s'appelle la *différentielle d'ordre k de f*.
Si $d^k f$ est continue sur $\mathcal{U}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \geq 1$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple. $(x, y) \mapsto xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ est $\mathcal{C}^1$ non $\mathcal{C}^2$

Exemple. Une application multilinéaire est $\mathcal{C}^\infty$.

Définition. Soit $a \in \mathcal{U}$ et $h \in \mathbb{R}^n$ non nul. On dit que f admet une *dérivée directionnelle en a suivant h* si la limite suivante existe

$$f'(a; h) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(a + t.h) - f(a)\right).$$

En particulier, si h est le i-è vecteur e_i de la base canonique

$$\partial_i f(a) = f'(a; e_i)$$

est appelé la *i-è différentielle partielle de f en a.*

Proposition. *Si f est différentiable en a alors f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions et on a pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$*

$$df_a(h) = \partial_1 f(a).h_1 + \cdots + \partial_n f(a).h_n$$

Exemple (théorème de Rolle)**.** Si $\mathcal{U}$ est borné et si f est continue sur $\overline{\mathcal{U}}$, différentiable sur $\mathcal{U}$ et nulle sur $\overline{\mathcal{U}} \backslash \mathcal{U}$ alors il existe $a \in \mathcal{U}$ tel que $df_a = 0$.

Exemple (théorème de Motzkin)**.** Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$ alors $x \mapsto d(x, F)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus F$ si et seulement si F est convexe.

Définition. Si $f = (f^1, \ldots, f^p)$ est différentiable en a, on appelle *matrice jacobienne de f en a* la matrice $J_f(a)$ de df_a dans la base canonique *i.e.* $J_f(a) = \left(\partial_i f^j\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Remarque. Si $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ et $g : \mathcal{V} \to \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^q$ sont telles que f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et g est différentiable en $f(a) \in \mathcal{V}$ alors $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)).J_f(a)$.

Proposition. *f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si et seulement si ses différentielles partielles existent et sont continues.*

Théorème de Schwarz. *Si f est deux fois différentiable sur $\mathcal{U}$ alors pour tout $a \in \mathcal{U}$ et pour tous $h, k \in \mathbb{R}^n$, on a $\partial_i \left(\partial_j f\right)(a)(h, k) = \partial_j \left(\partial_i f\right)(a)(h, k)$.*

Remarque. L'ordre de différentiation pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ n'intervient donc pas et on note indifféremment $\partial^2_{i,j} f(a)$ ou $\partial^2_{j,i} f(a)$ l'application $\partial_i \left(\partial_j f\right)(a) = \partial_j \left(\partial_i f\right)(a)$.

Formule de Taylor avec reste intégral. *Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathcal{U}$ et si $[a, a+h] \subset \mathcal{U}$ alors*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f_a(h)^k}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} d^{n+1} f_{x+th}(h)^{n+1} dt$$

3. Difféomorphismes

On suppose dans cette section que $p = n$.
Définition. On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un *difféomorphisme* si f est différentiable , bijective et telle que f^{-1} est aussi différentiable.

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, on dit alors que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Proposition. *Soit $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ intégrable alors*

$$\int_{\mathcal{V}} f(x)dx = \int_{\mathcal{U}} f[\varphi(t)].|\det J_\varphi(t)|dt.$$

Exemple. Soit $\mathcal{U} =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ et $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0\}$ alors

$$\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}, (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

est un difféomorphisme.

Application. Calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

Théorème d'inversion locale. *Soit $a \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que* $\det J_f(a) \neq 0$ *alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ de a et un voisinage $\mathcal{V}$ de $f(a)$ tels que $f : \mathcal{U}' \to \mathcal{V}$ soit un difféomorphisme.*

Théorème d'inversion globale. *Soit $f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ de classe $\mathcal{C}^1$, injective et telle que* $\det J_f(a) \neq 0$ *pour tout $a \in \mathcal{U}$ alors f est un difféomorphisme.*

Application (théorème de Brouwer)**.** Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.

4. Cas particulier des fonctions à valeurs réelles

Définition. a est un *point critique* si $df_a = 0$

Proposition. *Si f admet un extremum en a alors a est un point critique.*

Contre-exemple. $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathcal{U}$, on considère la forme quadratique

$$Q_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \partial^2_{i,i} f(a) h_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \partial^2_{i,j} f(a) h_i h_j.$$

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2. *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathcal{U}$ est un point critique, alors*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} Q_a(h) + o(\|h\|^2)$$

Proposition. *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathcal{U}$ est un point critique, alors*

- (*i*) *si Q_a est définie positive alors f admet un minimum local en a,*
- (*ii*) *si Q_a est définie négative alors f admet un maximum local en a,*
- (*iii*) *si Q_a est non dégénérée mais ni positive ni négative alors f admet un point-selle en a.*

Exemple. $x \mapsto \langle x, a \rangle e^{-\|x\|^2}$

Développements

Théorème de Liapounov.

Théorème de Motzkin.

Théorème d'inversion locale.

Théorème de Brouwer.

Références

[1] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 2*, Dunod, 1999.

[2] A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse 1*, Masson, 1997.

[3] P. Donato, *Calcul différentiel pour la licence*, Dunod, 2000.

[4] S. Gonnord et N. Tosel, *Calcul différentiel*, Ellipses, 1998.

[5] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.

Analyse 18 – Application des formules de Taylor et des développements limités

1. Formules de Taylor et approximation

1.1. **Accroissements finis et restes de Lagrange.**

1.2. **Méthodes numériques de résolution d'E.D.O..**
⟶ Étude numérique d'une E.D.O.

1.3. **Méthodes numériques de calcul d'intégrales.**

1.4. **Vitesse de convergence d'une méthode.**
⟶ Méthode de Newton pour les polynômes

1.5. **Reste intégral et régularité.**

2. Comportement local et géométrie

2.1. **Formule de Taylor-Young et D.L.**

2.2. **Comportement local d'une courbe.**

2.3. **Comportement local d'une surface.**

3. Étude asymptotique

3.1. **Développements asymptotiques.**

3.2. **Exemple de la méthode de Laplace.**

3.3. **Exemple de la formule d'Euler-MacLaurin.**
⟶ Application de la formule d'Euler-MacLaurin

Développements

Applications de la formule d'Euler-MacLaurin.

Méthode de Newton pour les polynômes.

Étude numérique d'une E.D.O..

Références

[1] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse*, Dunod, 1996.

[2] P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1982.

[3] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.

Analyse 19 – Problèmes d'extremum

1. Existence d'un extremum

Utilisation de la compacité.
⟶ Théorème de John

Utilisation de la dimension finie.

Distance à une partie.

Polynôme de meilleure approximation.

Structure hilbertienne.

Théorème de projection.

Fonctionnelle convexe.

2. Localisation d'un extremum

Points critiques.

Caractérisation des extrema.

Optimisation sous contrainte.
⟶ Théorème des extrema liés et application

Cas particulier : fonctions harmoniques ou holomorphes.

3. Problèmes dont la résolution conduit à un problème d'extremum

Normes et normes induites.

Bases et déterminants.

Sur les endomorphismes remarquables d'un espace euclidien.

En analyse complexe.
⟶ Théorème de représentation conforme

Développements

Théorème de représentation conforme.

Théorème des extrema liés et application.

Théorème de John.

Références

[1] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

[2] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1985.

[3] S. Chatterji, *Cours d'Analyse*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.

[4] P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1982.

[5] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 1996.

[6] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[7] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

Analyse 20 – Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives de solutions.

Soit $\mathcal{U} = I \times \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On considère l'équation différentielle (E) : $X' = f(t, X)$.

1. Théorèmes généraux

Définition. Une solution de (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction dérivable $x : I \to \mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $t \in I$, $(t, x(t)) \in \mathcal{U}$ et $x'(t) = f(t, x(t))$. On dit que x est une *solution maximale* s'il n'existe pas de solution sur un intervalle $J \supsetneqq I$.

Exemple. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x(t) = e^{at}$ est une solution maximale de l'équation $X' = aX$.

On dit que f est *localement lipschitzienne en la seconde variable* si pour tout $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (t_0, x_0) et $C > 0$ tels que, pour tous $(t, x_1) \in \mathcal{V}$ et $(t, x_2) \in \mathcal{V}$, on a $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq C \|x_1 - x_2\|$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz. *Si f est localement lipschitzienne en la seconde variable alors pour tout $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$, il existe une unique solution maximale x, définie sur un intervalle ouvert $]T_*, T^*[$ contenant t_0, telle que $x(t_0) = x_0$.*

Remarque. Les graphes de deux solutions distinctes ne se coupent pas.

Théorème de l'explosion. *Soit $x(t)$ une solution maximale définie sur un intervalle $]T_*, T^*[$ et supposons que $I =]a, b[$.*

(i) Si $T^* < b$ alors $\lim_{t \to T^*} \|x(t)\| = +\infty$.

(ii) Si $T_* > a$ alors $\lim_{t \to T_*} \|x(t)\| = +\infty$.

Proposition. *On suppose que $\mathcal{U}$ est un parallélépipède sur lequel f est k-lipschitzienne en la seconde variable. Soit $u_1(t)$ et $u_2(t)$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le graphe est dans $\mathcal{U}$ vérifiant*

$$\|u_1'(t) - f(t, u_1(t))\| \leq \varepsilon_1 \ , \ \|u_2'(t) - f(t, u_2(t))\| \leq \varepsilon_2$$
$$\text{et } \|u_1(t_0) - u_2(t_0)\| \leq \delta$$

alors

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \delta e^{k|t-t_0|} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \left(e^{k|t-t_0|} - 1\right).$$

2. Étude qualitative en dimension 1

Dans cette section, on suppose que $n = 1$.

Définition. Les *isoclines* sont les courbes sur lesquelles le champ $f(t, X)$ a une direction donnée.

Définition. Une fonction dérivable α est une *barrière inférieure* sur I si $\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t))$ pour tout $t \in I$.

On dit que la barrière est *forte* si l'inégalité est stricte ; on définit de façon analogue les barrières supérieures.

Proposition. *Supposons que α soit une barrière inférieure forte ou que f soit lipschitzienne dans une région du plan. Si x est une solution telle que $\alpha(t_0) \leq x(t_0)$ pour un $t_0 \in I$ alors $\alpha(t) \leq x(t)$ pour tout $t \geq t_0$ pour lequel x est définie.*

On dit alors que la barrière est *non poreuse*.

Exemple. L'isocline I_0 de $X' = X^2 - t$ est une barrière inférieure si $X < 0$ et supérieure si $X > 0$.

Définition. Si α et β sont respectivement un barrière inférieure et supérieure non poreuse et si $\alpha(t) < \beta(t)$ pour tout $t \in I$ alors $\{(t, x) \ ; \ t \in I \ , \ \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\}$ est appelé un *entonnoir* sur I.

Proposition. *Si α et β définissent un entonnoir et si x est une solution telle que $(t^*, u(t^*))$ est dans l'entonnoir pour un certain $t^* \in I$ alors $(t, u(t))$ est dans l'entonnoir pour tout $t \geq t^*$ dans I.*

Exemple. Les isoclines I_0 et I_{-1} de $X' = X^2 - t$ définissent un entonnoir si $X < 0$.

Définition. Si α et β sont respectivement un barrière inférieure et supérieure non poreuse et si $\alpha(t) > \beta(t)$ pour tout $t \in I$ alors $\{(t, x) \ ; \ t \in I \ , \ \alpha(t) \geq x \geq \beta(t)\}$ est appelé un *anti-entonnoir* sur I.

Proposition. *Si α et β définissent un anti-entonnoir A alors il existe une solution x telle que $\alpha(t) \geq x(t) \geq \beta(t)$ pour tout t dans I. On note $I =]a, b[$, si on a de plus*

$$\lim_{t \to b} |\alpha(t) - \beta(t)| = 0$$

et si $\partial_2 f \geq 0$ dans A, alors la solution est unique.

Exemple. Les isoclines I_1 et I_0 de $X' = X^2 - t$ définissent un anti-entonnoir si $X > 0$.

On s'intéresse aussi aux éventuelles asymptotes verticales des solutions :

Exemple. Dans la région $X > 0$ et $X^2 - t > \frac{X^2}{2}$, les solutions de $X' = \frac{X^2}{2}$ forment des barrières inférieures pour $X' = X^2 - t$. La solution de $X' = \frac{X^2}{2}$ passant par $(0, 1)$ a pour équation $x(t) = \frac{2}{2-t}$ donc la solution de $X' = X^2 - t$ passant par $(0, 1)$ a une asymptote verticale en $t = 2$.

3. Équations différentielles linéaires

3.1. Structure de l'ensemble des solutions.

3.2. Équation $Y' = A(t)Y$.

Proposition. *La solution $u(t)$ de $X' = AX$ avec $u(t_0) = x_0$ est $u(t) = e^{(t-t_0)A} x_0$.*

Exemple. Supposons que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admette deux valeurs propres réelles distinctes non nulles λ_1 et λ_2.

(*i*) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ alors les solutions tendent vers $(0, 0)$ pour $t \to -\infty$ et vers l'infini pour $t \to +\infty$: il s'agit d'un *noeud répulsif*.

(*ii*) Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ alors les deux demi-droites de direction v_1 orientées vers 0 sont des solutions, les deux demi-droites de direction v_2 orientées vers l'infini sont des solutions, les autres sont asymptotes aux deux premières pour $t \to -\infty$ et aux deux derniers pour $t \to +\infty$: il s'agit d'un *col*.

(*iii*) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ alors les solutions tendent vers $(0, 0)$ pour $t \to +\infty$ et vers l'infini pour $t \to -\infty$: il s'agit d'un *noeud attractif*.

3.3. **EDO linéaire scalaire d'ordre n.**
$\longrightarrow$ Étude de $y'' + q(t)y = 0$

4. Systèmes différentiels non linéaires

4.1. **Généralités.**

Définition. L'équation $X' = f(t, X)$ est dite *autonome* si f ne dépend pas explicitement de t.

Le *portrait de phase* des solutions est l'ensemble des projections des solutions dans l'espace des x_i.

Exemple. Le portrait de phase du système $x' = y, y' = -x$ est constitué de cercles concentriques.

Remarque. Quitte à poser $Y = (t, X)$, on peut toujours ramener l'étude d'un système $X' = f(t, X)$ à celle du système autonome $Y' = (1, f(Y))$.

4.2. **Exemples remarquables.**

Exemple (système proie-prédateur)**.** Il s'agit du système $\begin{cases} x' = ax - cxy \\ y' = -by + dxy \end{cases}$ avec $a, b, c, d > 0$. Les solutions de ce système telles que $x(t_0) > 0$ et $y(t_0) > 0$ sont périodiques.

4.3. **Retour à un problème linéaire.**

Théorème de Liapounov. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f(0) = 0$ et telle que* Re $\lambda < 0$ *pour toute valeur propre λ de df_0. Alors pour x_0 voisin de 0, la solution $x(t)$ de $X' = f(X), X(0) = x_0$ tend exponentiellement vers 0 lorsque t tend vers l'infini.*

Développements

Étude de $y'' + q(t)y = 0$.

Système proie-prédateur.

Théorème de Liapounov.

Références

[1] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 3*, Dunod, 1996.

[2] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 1996.

[3] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[4] J. Hubbard et B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, 1999.

[5] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales, tome 4*, Masson, 1993.

[6] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.

[7] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

Analyse 21 – Équations différentielles linéaires. Exemples

1. Généralités

1.1. **Définition.**

1.2. **Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.**

1.3. **Structure de l'ensemble des solutions.**

1.4. **Bases de l'ensemble des solutions, wronskien.**

2. Résolution et aspects qualitatifs

2.1. **Résultats principaux.**

2.2. **Méthodes classiques.**

2.3. **Exemples.**
$\longrightarrow$ Équation $y'' + qy = 0$

3. Stabilité et linéarisation

3.1. **Stabilité.**

3.2. **Petites perturbations.**

3.3. **Théorème de linéarisation.**

3.4. **L'exemple du théorème de Liapounov.**
$\longrightarrow$ Théorème de Liapounov

Développements

Équation $y'' + qy = 0$.

Théorème de Liapounov.

Références

[1] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 1996.

[2] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[3] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[4] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

[5] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales*, Masson, 1993.

Analyse 22 – Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées

1. Équations non résolues

1.1. **Pathologies.**

1.2. **Recollement.**

2. Équations linéaires

2.1. **Résultats généraux.**

2.2. **Méthodes classiques.**

2.2.1. *Variation de la constante.*

2.2.2. *Coefficients constants.*

2.2.3. *Développement en série entière.*

2.3. **Aspects qualitatifs.**

$\longrightarrow$ Équation $y'' + qy = 0$

3. Quelques méthodes numériques

$\longrightarrow$ Exemple de problème aux limites

Développements

Équation $y'' + qy = 0$.

Exemple de problème aux limites.

Références

[1] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse*, Dunod, 1996.

[2] P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1982.

[3] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 1996.

[4] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[5] J. Lelong-Ferrand et J.-M. Arnaudiès, *Cours de mathématiques*, Dunod, 1977.

[6] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

[7] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales*, Masson, 1993.

Analyse 23 – Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

1. Définitions et critères de convergence

1.1. **Définition et exemples.**

1.2. **Suites de Cauchy.**

1.3. **Moyennes de Cesaro.**

1.4. **Valeurs d'adhérence.**

2. Caractérisations séquentielles et densité

2.1. **Densité et approximation.**

2.2. **Continuité.**

2.3. **Compacité.**

2.4. **Suites denses et équirépartition.**
⟶ Suites équiréparties

3. Approximation dans $\mathbb{R}$

3.1. **Approximations successives et points fixe.**

3.2. **Accélération de convergence.**

3.3. **Exemples remarquables.**
⟶ Méthode de Newton pour les polynômes

4. Suites de coefficients

4.1. **Sur les séries numériques.**

4.2. **Sur les séries entières.**
⟶ Théorème tauberien fort

4.3. **Sur les séries de Fourier.**

Développements

Suites équiréparties.

Méthode de Newton pour les polynômes.

Théorème tauberien fort.

Références

[1] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse*, Dunod, 1996.

[2] A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse 1*, Masson, 1997.

[3] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[4] J.-M. Monier, *Cours de mathématiques*, Dunod, 2000.

[5] Ovaert-Verley

Analyse 24a – Comportement asymptotique des suites numériques. Exemples

1. Généralités

1.1. Définition et exemples.

1.2. Comparaison et équivalents.

1.3. Exemples d'accélération de convergence.

1.4. Comportement d'une suite et séries.
⟶ Théorème tauberien fort

2. Exemples de suites divergentes

⟶ Suites équiréparties
⟶ Séries génératrices et équations diophantiennes

3. Convergence de méthodes numériques

3.1. Méthode de Newton.

3.1.1. *Définition générale.*

3.1.2. *Cas particulier des polynômes.*
⟶ Méthode de Newton pour les polynômes

3.1.3. *Classification des points fixes.*

3.2. Résolution de système linéaire.

3.3. Intégration numérique.
⟶ Méthode de Gauss et polynômes orthogonaux

Développements

Théorème tauberien fort.

Suites équiréparties.

Séries génératrices et équations diophantiennes.

Méthode de Newton pour les polynômes.

Méthode de Gauss et polynômes orthogonaux.

Références

[1] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse*, Dunod, 1996.

[2] A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse 1*, Masson, 1997.

[3] P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1982.

[4] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 1996.

[5] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[6] Ovaert

[7] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

Analyse 24b – Rapidité de convergence d'une suite

1. Généralités

1.1. **Définition et exemples.**

1.2. **Comparaison et équivalents.**

1.3. **Exemples d'accélération de convergence.**

1.4. **Vitesse de convergence d'une suite et séries.**
$\longrightarrow$ Théorème tauberien fort

2. L'exemple de la méthode de Newton

2.1. **Définition générale.**

2.2. **Cas particulier des polynômes.**
$\longrightarrow$ Méthode de Newton pour les polynômes

2.3. **Classification des points fixes.**

2.4. **Accélération de convergence.**

3. Vitesse de convergence dans des méthodes numériques

3.1. **Intégration numérique.**
$\longrightarrow$ Méthode de Gauss et polynômes orthogonaux

3.2. **Résolution de système linéaire.**

Développements

Théorème tauberien fort.

Méthode de Newton pour les polynômes.

Méthode de Gauss et polynômes orthogonaux.

Références

[1] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse*, Dunod, 1996.

[2] P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1982.

[3] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 1996.

[4] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[5] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

Analyse 25 – Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples

1. Dépendance vis-à-vis de la fonction f

1.1. **Si f est continue.**

1.2. **Si f est monotone.**

1.3. **Si f est affine.**

1.4. **Si f est une contraction.**

1.5. **Si f est une homographie.**

2. Dépendance vis-à-vis du premier terme

2.1. **Points fixes attractifs, répulsifs ou indifférents.**

2.2. **Bassins d'attraction.**

2.3. **Opérateur cycliques et hypercycliques.**
$\longrightarrow$ Critère de Kitaï

3. Approximation et équations non linéaires

3.1. **Quelques méthodes.**

3.2. **Méthode de Newton.**
$\longrightarrow$ Méthode de Newton pour les polynômes

4. Méthodes numériques en algèbre linéaire

4.1. **Principe des méthodes itératives.**

4.2. **Méthodes de gradient.**
$\longrightarrow$ Méthode du gradient à pas conjugué

4.3. **Méthode de la puissance itérée.**

Développements

Hypercyclicité, critère de Kitaï.

Méthode de Newton pour les polynômes.

Méthode du gradient à pas conjugué.

Références

[1] P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1982.

[2] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse*, Dunod, 1996.

[3] S. Gonnord et N. Tosel, *Calcul différentiel*, Ellipses, 1998.

[4] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[5] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[6] J.-E. Rombaldi, *Analyse matricielle. Cours et exercices résolus*, EDP Sciences, 1999.

[7] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.

Analyse 27 – Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

1. Continuité

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$.

1.1. Généralités.

Définition. On dit que f est continue en $a \in A$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \ (|x-a| < \alpha, x \in A) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

f est continue *sur* A si f est continue en tout $a \in A$.

Proposition. *f est continue en $a \in A$ si et seulement si, pour tout suite $(x_n)_n$ de A qui tend vers a, la suite $(f(x_n))_n$ tend vers $f(a)$.*

Exemples. Les fonctions $x \mapsto x^n, n \geq 0$ sont continues. Toute fonction $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est continue.

Contre-exemple. $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est continue nulle part

Proposition. *L'ensemble $C^0(A)$ des fonctions $A \to \mathbb{R}$ continues sur A est une $\mathbb{R}$-algèbre.*

Exemple. Les fonctions polynômiales sont continues.

Proposition. *Si f est continue sur A et si g est continue sur $f(A)$ alors $g \circ f$ est continue sur A.*

Exemple. Si f est continue alors $|f|$ est continue.

Définition. Soit $A \supset B$. On dit qu'une fonction continue $g : B \to \mathbb{R}$ est prolongeable par continuité sur A s'il existe une fonction continue $f : A \to \mathbb{R}$ telle que $f(b) = g(b)$ pour tout $b \in B$.

Proposition. *Si f est continue sur $A - \{a\}$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et est finie alors f est prolongeable par continuité sur A.*

Exemples. $x \in]0,1] \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ et $x \in]0,1] \mapsto \sin \frac{1}{x}$

1.2. Discontinuités.

Définition. Si f n'est pas continue en $a \in A$, on dit que f est discontinue en a. De plus,

- (i) la discontinuité est dite de première espèce si $a \in \overset{\circ}{A}$ et si $f(a-0)$ et $f(a+0)$ existent,
- (ii) sinon, la discontinuité est dite de seconde espèce.

Exemple. La fonction $x \mapsto E(x)$ est discontinue en tout $n \in \mathbb{Z}$ et ses discontinuités sont de première espèce.

Exemple. La fonction $x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est discontinue en 0 et la discontinuité est de seconde espèce.

Définition. On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est réglée si ses discontinuités sont de première espèce.

Proposition. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est réglée alors l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable.*

Exemple. $x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

1.3. Connexité et compacité.

Théorème des valeurs intermédiaires. *Si f est continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle.*

Corollaire. *L'image d'un segment par une application continue est un segment.*

Proposition. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Contre-exemple. $x \in]0,1] \mapsto \frac{1}{x}$

Conséquence. On peut définir $\|f\|_\infty = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

Théorème de Weierstrass. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et si $\varepsilon > 0$ alors il existe une fonction polynômiale $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$.*

Application. Théorème tauberien fort.

Remarque. Sur $\mathbb{R}$, c'est faux si f n'est pas elle-même polynômiale.

Définition. On dit que f est uniformément continue sur A si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \ (|x-y| < \alpha, x, y \in A) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Remarque. Une fonction uniformément continue est continue mais la réciproque est fausse ($x \mapsto x^2$).

Proposition. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est uniformément continue.*

2. Dérivabilité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

2.1. Généralités.

Définition. On dit que f est dérivable en $x_0 \in I$ si la limite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I - \{x_0\}}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et on la note alors $f'(x_0)$. Si f est dérivable en tout $x_0 \in I$, on dit que f est dérivable sur I et l'application $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée l'application dérivée.

Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I \cap]x_0, +\infty[}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$ existe, on dit que f est dérivable à droite en x_0. On définit de façon analogue la dérivabilité à gauche et $f'_g(x_0)$.

Exemples. $x \mapsto x^n, n \geq 0$, et $x \mapsto |x|$

Proposition. *L'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{R}$ dérivables sur I est une $\mathbb{R}$-algèbre et*

$$(f+g)' = f' + g' \ , \ (\lambda f)' = \lambda f' \ , \ (fg)' = f'g + fg' \ ,$$

et lorsque c'est défini :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{et} \quad (h \circ f)' = h' \circ f \times f'.$$

Exemple. Les fonctions polynômiales sont dérivables.

Proposition. *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Contre-exemple. $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ est dérivable en 0 mais n'est continue nulle part ailleurs

Contre-exemple. On note Δ la fonction 1-périodique telle que $\Delta(x) = |x|$ pour tout $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ puis on pose

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \Delta(2^p x)$$

alors f est continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable.

Corollaire. *L'ensemble des fonctions continues sur I mais nulle part dérivables est dense dans $C^0(I)$.*

2.2. **Théorème de Rolle.**

Théorème de Rolle. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Théorème des accroissements finis. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.*

Application. Méthode de Newton pour les polynômes.

2.3. **Continuité de la dérivée.**
Une fonction dérivée n'est pas forcément continue.

Exemple. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Proposition. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable alors l'ensemble des points de continuité de f' est dense dans $\mathbb{R}$.*

Remarque. Il existe une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que l'ensemble des points de discontinuité de f' est dense dans $[0,1]$.

Théorème de Darboux. *Si f est dérivable sur I alors $f'(I)$ est un intervalle.*

3. Monotonie

Corollaire. *Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a,b]$, alors f induit un homéomorphisme de $[a,b]$ sur $f([a,b])$.*

Proposition. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$ et soit $x_0 \in \mathring{I}$.*

(i) *f constante $\iff$ $f'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathring{I}$.*

(ii) *f croissante $\iff$ $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathring{I}$.*

(iii) *Si f a un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Lemme de Riesz. *Soit g une fonction continue sur $[a,b]$ et $E = \{x \in]a,b[; \exists \xi > x / g(\xi) > g(x)\}$. Si E est non vide alors E est une réunion disjointe $E = \bigcup]a_k, b_k[$ avec $g(a_k) \leq g(b_k)$.*

Théorème de Lebesgue. *Une fonction monotone est dérivable presque partout.*

4. Dérivées d'ordre supérieur

On définit les dérivées successives d'une fonction f en posant $f^{(0)} = f$ et $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ pour tout $n \geq 0$.

Exemple. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas deux fois dérivable en 0

Définition. Si f admet une dérivée d'ordre k continue sur I, on dit que f est de classe C^k et on note $f \in C^k(I)$. Si f admet des dérivées de tout ordre sur I, on dit que f est de classe C^∞ et on note $f \in C^\infty(I)$.

Exemple. $x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est de classe C^∞

Formule de Taylor avec reste intégral. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}, alors*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Application. Si f est C^∞ et si $f^{(k)}(0) = 0$ pour $0 \leq k \leq p$ alors au voisinage de 0, on a $f(x) = x^p g(x)$ avec g C^∞.

Proposition. *Il existe φ de classe C^∞ telle que $\varphi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\varphi(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$.*

Théorème de Borel. *Si $(a_k)_{k \geq 0}$ est une suite de $\mathbb{R}$ alors il existe une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $u^{(k)}(0) = a_k$ pour tout $k \geq 0$.*

Développements

Théorème tauberien fort.

Méthode de Newton pour les polynômes.

Exemple de fonction continue nulle part dérivable.

Théorème de Borel.

Références

[1] A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse 1*, Masson, 1997.

[2] B. Gostiaux, *Cours de Mathématiques spéciales*, P.U.F., 1993.

[3] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[4] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[5] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.

Analyse 28 – Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications

1. Définitions et caractérisations

1.1. **Définitions et exemples.**

1.2. **Caractérisation des fonctions monotones.**
⟶ Fonctions à variation bornée

1.3. **Caractérisations des fonctions convexes.**

2. Régularité

2.1. **Continuité et points de discontinuité.**

2.2. **Lien avec la dérivabilité.**

3. Suites de fonctions

3.1. **Propriétés immédiates des fonctions convexes.**

3.2. **Utilisation de la monotonie.**
⟶ Théorème de Helly

3.3. **Convergence uniforme.**

4. Quelques applications

4.1. **Suites récurrentes.**

4.2. **Comparaison série-intégrale.**

4.3. **Inégalités de convexité.**

4.4. **Optimisation.**
⟶ Théorème de John

Développements

Fonctions à variation bornée.

Théorème de Helly.

Théorème de John.

Références

[1] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

[2] P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1982.

[3] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[4] G. Lacombe et P. Massat, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[5] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

Analyse 29 – Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples

1. Définitions et généralités

1.1. **Définitions et exemples.**

1.2. **Critère de Cauchy.**

1.3. **Opérations algébriques.**

1.4. **Remarques sur les séries entières.**
⟶ Théorème tauberien fort

2. Séries à termes positifs

2.1. **Relations de comparaisons.**

2.2. **Critères remarquables.**

2.3. **Comparaison série-intégrale.**
⟶ Exercice de Coupet

2.4. **Comportement asymptotique.**
⟶ Suite de l'exercice de Coupet (trapèzes)

3. Suites à termes quelconques

3.1. **Quelques pathologies.**

3.2. **Séries alternées et critère d'Abel.**

3.3. **Groupement de termes.**

3.4. **Convolution.**

4. Exemples d'utilisation des séries de Fourier

4.1. **Définition et principaux théorèmes.**

4.2. **Calculs de quelques séries.**

4.3. **Formule sommatoire de Poisson.**
⟶ Formule sommatoire de Poisson
⟶ Prolongement de la fonction ζ

Développements

Théorème tauberien fort.

Exercice de Coupet.

Formule sommatoire de Poisson.

Prolongement de la fonction ζ.

Références

[1] B. Gostiaux, *Cours de Mathématiques spéciales*, P.U.F., 1993.
[2] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.
[3] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

Analyse 32 – Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables

1. Définitions de l'intégrale

1.1. **Intégrale de Riemann.**
⟶ Suites équiréparties

1.2. **Intégrale de Lebesgue.**

1.3. **Intégrale des fonctions réglées.**

1.4. **Comparaison.**

2. Calculs d'intégrales

2.1. **Exemples de méthodes exactes.**

2.2. **Méthodes de calcul approché.**
⟶ Méthode de Gauss et polynôme orthogonaux

2.3. **Comportements asymptotiques.**
⟶ Méthode de Laplace

3. Espaces L^p

3.1. **Définition et exemples.**

3.2. **Propriétés remarquables.**
⟶ Dual de L^p en mesure finie pour $1 < p < 2$

3.3. **Théorèmes de convergence.**

4. Convolution et approximation

4.1. **Produit de convolution.**

4.2. **Régularisation.**

4.3. **Quelques applications.**

Développements

Suites équiréparties.

Méthode de Gauss et polynômes orthogonaux.

Méthode de Laplace.

Dual de L^p.

Références

[1] J. Gapaillard, *Intégration pour la licence*, Dunod, 2002.
[2] B. Gostiaux, *Cours de Mathématiques spéciales*, P.U.F., 1993.
[3] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.
[4] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.
[5] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.
[6] Rudin

Analyse 33 – Espaces L^p $(1 \leq p \leq +\infty)$

1. L'espace L^2

1.1. **Définition et exemples.**

1.2. **Structure hilbertienne.**

1.3. **Espace de Bergman.**
$\longrightarrow$ Noyau de Bergman

2. Les espaces L^p

2.1. **Définition et exemples.**

2.2. **Propriétés remarquables.**
$\longrightarrow$ Dual de L^p en mesure finie pour $1 < p < 2$

2.3. **Théorèmes de convergence.**

3. Approximation de fonctions

3.1. **Polynômes de meilleure approximation.**

3.2. **Convolution.**

3.3. **Régularisation.**

4. Analyse de Fourier

4.1. **Généralités sur les séries de Fourier dans L^2.**

4.2. **Transformation de Fourier dans L^1.**

4.3. **Transformation de Fourier dans L^2.**
$\longrightarrow$ Vecteurs propres de la transformation de Fourier

---

Développements

Noyau de Bergman.

Dual de L^p.

Vecteurs propres de la transformation de Fourier.

Références

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[2] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 1996.

[3] F. Hirsch et G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[4] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[5] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

Analyse 38 – Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Soit $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$ avec Ω métrique et X mesuré, $t_0 \in \Omega$ et $F : \Omega \to \mathbb{C}, t \mapsto \int_X f(t,x)dx$.

1. Régularité des fonctions définies par une intégrale à paramètre

1.1. Continuité.

Théorème. *On suppose que*
- *$x \mapsto f(t,x)$ est mesurable pour tout $t \in \Omega$,*
- *$t \mapsto f(t,x)$ est continue en t_0 pour tout $x \in X$,*
- *il existe un voisinage compact V de t_0 dans Ω et $g \in L^1(X)$ tels que : $|f(t,x)| \leq g(x)$,$\forall (t,x) \in V \times X$.*

Alors $F(t_0)$ existe et F est continue en t_0.

Exemple. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}dx$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème. *Si $f : [a,b] \times X \to \mathbb{C}$ est continue avec X compact alors F est continue sur $[a,b]$.*

1.2. Dérivabilité. Ω est ici un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème. *On suppose que*
- *$x \mapsto f(t,x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \Omega$,*
- *$t \mapsto f(t,x)$ est dérivable pour tout $x \in X$,*
- *il existe un voisinage compact V de t_0 dans Ω et $g \in L^1(X)$ tels que : $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$,$\forall (t,x) \in V \times X$.*

Alors F est dérivable en t_0 de dérivée $\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx$.

Exemple. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \log(b) - \log(a)$ pour $a,b > 0$.

Théorème. *Si $f : [a,b] \times X \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec X compact alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et on a $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx$.*

Application. Si $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ est continue alors on a $\int_a^b \int_c^d f(t,x)dxdt = \int_c^d \int_a^b f(t,x)dtdx$.

1.3. Holomorphie. Ω est ici un domaine de $\mathbb{C}$.

Théorème. *On suppose que*
- *$x \mapsto f(t,x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \Omega$,*
- *$t \mapsto f(t,x)$ est holomorphe sur Ω pour tout $x \in X$,*
- *il existe un voisinage compact V de t_0 dans Ω et $g \in L^1(X)$ tels que : $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$,$\forall (t,x) \in V \times X$.*

Alors F est holomorphe en t_0 et $F'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx$.

Application. La fonction Γ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$.

Application. La fonction ζ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ avec pôle simple en 1.

1.4. Cas des intégrales semi-convergentes.
Dans la plupart des cas, par une intégration par parties, on se ramène au cas des intégrales semi-convergentes.

Exemple. $t \in [0,+\infty[\to \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x}dx$ est continue.

2. Approximation et régularisation

2.1. Propriétés du produit de convolution.
Soit $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ deux fonctions.

Définition. Le *produit de convolution* de f et g est
$$f \star g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(t-x)dx.$$

Théorème. *Soit $1 \leq p,q \leq +\infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors $f \star g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ et on a $\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dont l'une au moins est à support compact. Alors $f \star g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq k$, on a $D^\alpha(f \star g) = D^\alpha f \star g$.*

2.2. Approximation par convolution.

Définition. On appelle *approximation de l'unité* toute suite $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $L^1(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $p_j \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} p_j(x)dx = 1$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{j\to+\infty} \int_{\{\|x\|\geq\varepsilon\}} p_j(x)dx = 0$

Exemple. $p_j(x) = \frac{j}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{j^2x^2}{2}}$, $p_j(x) = \frac{1}{j}\left(\frac{\sin\frac{jx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$, $p_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$.

Théorème. *Soit $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité.*

(i) Si $f \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$ alors, pour tout $|\alpha| \leq k$, on a
$$\lim_{j\to+\infty} \|D^\alpha(f \star p_j) - D^\alpha f\|_\infty = 0.$$

(ii) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < +\infty$ alors on a
$$\lim_{j\to+\infty} \|f \star p_j - f\|_p = 0.$$

Application. Théorèmes de Fejer et de Weierstrass.

Application. $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ et dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Application. Pour tout $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^1)$, il existe un unique $f \in \mathcal{C}^0(\overline{D(0,1)})$ tel que $\Delta f \equiv 0$ sur $D(0,1)$ et $f_{|\mathbb{S}^1} \equiv g$.

3. Représentation intégrale par la transformée de Fourier

3.1. Définition dans L^1 et propriétés.

Définition. La *transformée de Fourier* de $f \in L^1(\mathbb{R})$ est définie par $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \xi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{-i\xi x}dx.$

Propriétés. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors*

(i) $\widehat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

(ii) si $xf \in L^1(\mathbb{R})$ alors $(\widehat{f})'(\xi) = -\widehat{ixf}(\xi)$

(iii) si $f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$

(iv) si $g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f \star g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$

Exemple. Si $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ alors $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

Exemple. Si $f(x) = e^{-a|x|}$ avec $a > 0$ alors $\widehat{f}(\xi) = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$.

Formule d'inversion. *Si $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$ alors, pour presque tout x, on a $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$.*

Application. $L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), f \mapsto \widehat{f}$ est injective

Formule sommatoire de Poisson.

3.2. Transformée de Fourier dans L^2.

3.2.1. *Construction.*

3.2.2. *Vecteur propres de la transformation de Fourier.*

4. Représentations intégrales de fonctions holomorphes

4.1. Formule de Cauchy.

Formule de Cauchy. *Soit f holomorphe sur un domaine Ω de $\mathbb{C}$ et soit $z \in \Omega$, alors $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$.*

Conséquence. Une fonction f est holomorphe si et seulement si elle est analytique.

Application. Formule des résidus

Exemple. $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}dx = 0$

4.2. Espace de Bergman.

Définition. L'*espace de Bergman* du disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$ est défini par $\mathrm{A}^2(\mathbb{D}) = L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ et est muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dz$.

Proposition. $\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$ *est un espace de Hilbert donc une base hilbertienne est* $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n$.

Application. $k(\zeta, z) = \dfrac{1}{\pi(1-\overline{\zeta}z)^2}$ est un noyau reproduisant.

Développements

Prolongement de la fonction ζ.

Formule sommatoire de Poisson.

Vecteurs propres de la transformation de Fourier.

Espace de Bergman.

Références

[1] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 2*, Dunod, 1996.

[2] S. Chatterji, *Cours d'Analyse*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.

[3] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.

[4] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

Analyse 39 – Transformation de Fourier et produit de convolution

1. Convolution

1.1. **Définition et cas d'existence.**

1.2. **Application à la régularisation et à l'approximation.**

1.3. **Convolution et noyaux.**
$\longrightarrow$ Théorème de Fejer

2. Transformation de Fourier dans L^1 et $\mathcal{S}$

2.1. **Définition et règles de calcul.**

2.2. **Liens entre f et $\widehat{f}$.**

2.3. **Formules remarquables.**
$\longrightarrow$ Formule sommatoire de Poisson

2.4. **Application aux probabilités.**

3. Transformation de Fourier dans L^2

3.1. **Définition et extensions des résultats.**

3.2. **Une autre définition possible.**
$\longrightarrow$ Vecteurs propres de la transformation de Fourier

---

Développements

Théorème de Fejer.

Formule sommatoire de Poisson.

Vecteurs propres de la transformation de Fourier.

Références

[1] S. Chatterji, *Cours d'Analyse*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.

[2] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[3] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

[4] Rudin

Analyse 40 – Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

1. Convergence d'une suite de fonctions

1.1. **Différents modes de convergences.**

1.2. **Comparaison et implications.**

2. Régularité d'une série de fonctions

2.1. **Continuité.**

2.2. **Séries de fonctions et dérivation.**
$\longrightarrow$ Théorème de Borel

2.3. **Intérêt de l'analyticité.**

2.4. **Comportement au bord d'une série entière.**
$\longrightarrow$ Théorème tauberien fort

3. Théorèmes de convergence en intégration

3.1. **Cas de l'intégrale de Riemann.**

3.2. **Cas de l'intégrale de Lebesgue.**
$\longrightarrow$ Prolongement de la fonction ζ

4. Utilisation de structures hilbertiennes

4.1. **Séries de Fourier.**
$\longrightarrow$ Théorème de Fejer

4.2. **Lien avec la transformée de Fourier.**
$\longrightarrow$ Formule sommatoire de Poisson

4.3. **Bases hilbertiennes.**
$\longrightarrow$ Noyau de Bergman

Développements

Théorème de Borel.

Théorème tauberien fort.

Théorème de Fejer.

Formule sommatoire de Poisson.

Noyau de Bergman.

Prolongement de la fonction ζ.

Références

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[2] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[3] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[4] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

Analyse 41 – Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries

1. Recherche d'exemples

1.1. **Régularité.**

1.2. **Recherche d'équivalents.**

Formule d'Euler-MacLaurin, des trapèzes.

1.3. **Utilisation de séries entières.**

E.D.O., l'exemple du théorème taubérien fort.

2. Utilisation des séries de Fourier

2.1. **Généralités et résultats de convergence.**

2.2. **Application des séries de Fourier aux E.D.P..**

2.3. **Lien avec la transformée de Fourier.**
$\longrightarrow$ Formule sommatoire de Poisson

3. Utilisation en intégration

3.1. **Aspects calculatoires.**

3.2. **Sur la permutation d'une série et d'une intégrale.**
$\longrightarrow$ Prolongement de la fonction ζ

3.3. **Méthodes numériques d'intégration.**

4. Bases hilbertiennes

4.1. **Définition et caractérisations.**

4.2. **L'exemple de l'espace de Bergman.**
$\longrightarrow$ Noyau de Bergman

Développements

Formule sommatoire de Poisson.

Prolongement de la fonction ζ.

Noyau de Bergman.

Références

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[2] S. Chatterji, *Cours d'Analyse*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.

[3] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[4] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[5] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

Analyse 44 – Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications

On note Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $\Delta = D(0,1)$.

1. Généralités sur les fonctions holomorphes

1.1. Caractérisations.

1.2. Formule de Cauchy et analyticité.

1.3. Théorèmes fondamentaux.

2. Singularités et prolongement analytique

2.1. Singularités.

2.2. Théorème d'holommorphie sous l'intégrale.
$\longrightarrow$ Prolongement analytique de la fonction ζ

3. L'espace $\mathcal{H}(\Omega)$

3.1. L'espace métrique $\mathcal{H}(\Omega)$.

3.2. Théorème de Weierstrass sur $\mathbb{C}$.

3.3. Espace de Bergman.
$\longrightarrow$ Noyau de Bergman

4. Applications conformes

4.1. Définitions et lemme de Schwarz.

4.2. Représentation conforme et exemples.
$\longrightarrow$ Théorème de représentation conforme

4.3. Homographies.

Développements

Prolongement de la fonction ζ.

Noyau de Bergman.

Théorème de représentation conforme.

Références

[1] H. Buchwalter, *Variations sur l'analyse en maîtrise de mathématiques*, Ellipses, 1992.

[2] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1985.

[3] S. Chatterji, *Cours d'Analyse, tome 2*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.

[4] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

Analyse 45 – Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.

On note Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $\Delta = D(0,1)$.

1. Généralités sur les fonctions holomorphes

1.1. Caractérisations.

Définition. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \in \Omega$ si $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$ existe.

Définition et proposition. On dit que f est holomorphe sur Ω, et on note $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si f vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- (i) f est différentiable en tout point de Ω
- (ii) f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et, en notant $u = \mathrm{Re}\, f$ et $v = \mathrm{Im}\, f$, on a $\partial_x u = \partial_y v$ et $\partial_y u = -\partial_x v$.
- (iii) $\partial_{\overline{z}} f = 0$ où $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left[\partial_x + i\partial_y\right]$.

Exemple. Une série entière est holomorphe sur son disque de convergence.

Exemple. Si γ est un chemin fermé $\mathcal{C}^1$, on appelle $\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma^\star} \frac{d\zeta}{\zeta - a}$ l'indice de γ par rapport a. L'application $z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \gamma^\star$.

Propriétés. *$\mathcal{H}(\Omega)$ est une algèbre dont les inversibles sont les $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ne s'annulant pas. De plus, si $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega_2)$ avec $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ alors $g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$.*

1.2. Formule de Cauchy et analyticité.

Dans cette section, Ω est un disque.

Proposition. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\}) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ alors f admet une primitive.*

Théorème de Cauchy. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\}) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ et si γ est un chemin fermé $\mathcal{C}^1$ alors $\int_{\gamma^\star} f(z)dz = 0$.*

Formule de Cauchy. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ alors pour tout $z \in D(a,r)$, $f(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$.*

Corollaire. *Une fonction holomorphe est analytique.*

Application. Inégalités de Cauchy.

Proposition. *Soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{H}(\Omega)$ tendant uniformément sur les compacts vers une fonction f. Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et la suite $(f_n')_n$ tend uniformément sur les compacts vers f'.*

1.3. Théorèmes fondamentaux.

Théorème de Morera. *Si $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ et si $\int_{\gamma^\star} f(z)dz = 0$ pour tout chemin fermé γ $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Proposition. *Si $f \in \mathcal{C}(\Omega \times [a,b])$ et si, pour chaque $t \in [a,b]$, $z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe sur Ω alors $\varphi(z) = \int_a^b f(z,t)dt$ est holomorphe sur Ω et $\varphi'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt$.*

Exemple. Prolongement analytique de la fonction ζ.

Théorème des zéros isolés. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ s'annule sur un ensemble ayant un point d'accumulation alors f est nulle.*

Application. $\mathcal{H}(\Omega)$ est intègre.

Théorème de l'application ouverte. *L'image de Ω par une application holomorphe est un domaine de $\mathbb{C}$.*

Principe du maximum. *Une fonction holomorphe admettant un extremum local est constante.*

Théorème de Liouville. *Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ est bornée alors f est constante.*

Application. $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

2. Singularités et fonctions méromorphes

2.1. Singularités et séries de Laurent.

Définition et proposition. Si f est holomorphe sur une couronne $C(a, R_1, R_2)$ alors f admet un développement en série de Laurent $f(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ qui converge uniformément sur les compacts de $C(a, R_1, R_2)$. On appelle résidu de f en a, le nombre $\mathrm{Res}(f,a) = a_{-1}$.

Définition. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ alors on dit que f a en a

- (i) une singularité éliminable si f se prolonge holomorphiquement à Ω,
- (ii) un pôle d'ordre $p \geq 1$ si $f(z) = \sum\limits_{n=-p}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ avec $a_{-p} \neq 0$,
- (iii) une singularité essentielle si $f(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ avec une infinité de a_{-n} non nuls.

Proposition. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ est bornée au voisinage de a alors a est éliminable.*

Théorème de Casorati-Weierstrass. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ avec a essentielle alors, pour tout $r > 0$, $f(D(a,r) \setminus \{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$.*

2.2. Fonctions méromorphes et résidus.

Définition. On dit que f est méromorphe sur Ω, et on note $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, si et seulement s'il existe $A \subset \Omega$ discrète avec $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$ et A l'ensemble des pôles de f.

Exemple. $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ avec $-\mathbb{N}$ pour ensemble des pôles et ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$.

Exemple. $\zeta \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ avec 1 pour seul pôle.

Théorème des résidus. *Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $\mathcal{D}$ un domaine relativement compact dans Ω dont le bord $\partial\mathcal{D}$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on note $a_1, \dots, a_p$ les pôles de f dans $\mathcal{D}$ alors $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{D}} f(z)dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Res}(f, a_j)$.*

Application. Principe d'argument.

Application. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

3. L'espace $\mathcal{H}(\Omega)$

3.1. **L'espace métrique $\mathcal{H}(\Omega)$.**
On note $(K_n)_{n\geq 0}$ une suite exhaustive de compacts de Ω et on considère sur $\mathcal{H}(\Omega)$ la distance d définie par

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\sup_{z\in K_n} |f(z)-g(z)|}{1+\sup_{z\in K_n} |f(z)-g(z)|}.$$

Proposition. *$\mathcal{H}(\Omega)$ est complet pour cette distance.*

Théorème de Hurwitz. *Soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{H}(\Omega)$ tendant vers une fonction f. Si les f_n sont injectives alors f est constante ou injective.*

Théorème de Montel. *Les compacts de $\mathcal{H}(\Omega)$ sont les fermés bornés.*

3.2. **Théorème de Weierstrass sur $\mathbb{C}$.**

Théorème de Weierstrass. *Soit $(a_n)_n$ une suite d'éléments distincts de $\mathbb{C}$ telle que $|a_n| \to +\infty$ et $(k_n)_n$ une suite de $\mathbb{N}$. Il existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ dont les zéros sont les a_n avec multiplicité k_n.*

Application. Pour tout domaine Ω, il existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ qui ne se prolonge holomorphiquement à aucun domaine $\mathcal{U} \supsetneq \Omega$.

Corollaire. *$\mathcal{M}(\mathbb{C})$ est le corps des fractions de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.*

3.3. **Espace de Bergman.**

Définition. L'*espace de Bergman* du disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$ est défini par $\mathrm{A}^2(\mathbb{D}) = L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ et est muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dz$.

Proposition. *$\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert.*

Proposition. *La famille $(e_n)_n$, donnée par $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n$, est une base hilbertienne de $\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$.*

Application. $k(\zeta,z) = \dfrac{1}{\pi(1-\overline{\zeta}z)^2}$ est un noyau reproduisant

4. Applications conformes

4.1. **Représentation conforme.**
Une application f est conforme sur Ω si f conserve les angles orientés.

Définition. On dit qu'une application $f : \Omega \to \Omega'$ est un biholomorphisme si f est holomorphe, bijective et de fonction réciproque holomorphe.

$\mathrm{Aut}(\Omega)$ est l'ensemble des biholomorphismes de Ω sur Ω.

Un biholomorphisme est une application conforme.

Théorème. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors f est injective si et seulement si f est un biholomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$.*

Lemme de Schwarz. *Soit $f : \Delta \to \Delta$ holomorphe avec $f(0) = 0$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \Delta$. Si de plus il existe $z_0 \in \Delta$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe θ tel que $f(z) = e^{i\theta}z$ pour tout $z \in \Delta$.*

Application. $\mathrm{Aut}(\Delta) = \{z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}; |a| < 1\ ,\ \theta \in \mathbb{R}\}$

Théorème de représentation conforme. *Tout domaine simplement connexe distinct de $\mathbb{C}$ est biholomorphe à Δ.*

4.2. **Homographies.**
On note $\widehat{\mathbb{C}}$ la sphère de Riemann.
Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est méromorphe si et seulement si $f : \Omega \to \widehat{\mathbb{C}}$ est holomorphe.

Définition. On appelle homographie tout application du type $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ où $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ vérifient $ad-bc \neq 0$.

Si φ est une homographie alors $\varphi \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$.

Propriété. *L'action des homographies sur $\widehat{\mathbb{C}}$ est 3-transitive et laisse invariant le birapport.*

Théorème. $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \simeq PSL_2(\mathbb{C})$

Application. $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0,1\}) \simeq S_3$

Application. Déterminer $f : D \to \Delta$ biholomorphe où $D = \{\rho e^{i\theta}; 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$.

Développements

Prolongement de la fonction ζ.

Noyau de Bergman.

Théorème de représentation conforme.

Références

[1] H. Buchwalter, *Variations sur l'analyse en maîtrise de mathématiques*, Ellipses, 1992.

[2] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1985.

[3] S. Chatterji, *Cours d'Analyse, tome 2*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.

[4] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

Analyse 46 – Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications

1. Coefficients de Fourier et généralités

1.1. **L'espace de Hilbert L^2.**

1.2. **Définitions dans L^1.**

1.3. **Propriétés des coefficients de Fourier.**

2. Résultats de convergence

2.1. **Pathologies.**

2.2. **Théorème de Fejer et applications.**
$\longrightarrow$ Théorème de Fejer

2.3. **Théorème de Dirichlet et applications.**

3. Quelques applications

3.1. **Lien avec la transformation de Fourier.**
$\longrightarrow$ Formule sommatoire de Poisson

3.2. **Inégalités remarquables.**

3.3. **Résolution d'E.D.P..**

Développements

Théorème de Fejer.

Formule sommatoire de Poisson.

Références

[1] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

Analyse 47 – Exemples de problèmes d'interversion de limites

1. Pathologies et théorèmes généraux

1.1. **Suites et séries.**

1.2. **Intégrale de Riemann.**

1.3. **Intégrale de Lebesque et suites de fonctions.**
$\longrightarrow$ Noyau de Bergman

1.4. **Intégrales multiples et théorème de Fubini.**

2. Régularité et prolongement

2.1. **Comportement au bord d'une série entière.**
$\longrightarrow$ Théorème tauberien fort

2.2. **Continuité et dérivabilité sous le signe somme.**

2.3. **Prolongement analytique.**
$\longrightarrow$ Prolongement analytique de la fonction ζ

Développements

Noyau de Bergman.

Théorème tauberien fort.

Prolongement de la fonction ζ.

Références

[1] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[2] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[3] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

[4] Rudin

Analyse 48 – Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales ou polynômiales par morceaux. Exemples

1. Interpolation et approximation

1.1. Interpolation de Lagrange.

1.2. Autres méthodes d'interpolation.

1.3. Quelques méthodes numériques d'intégration.

⟶ Méthode de Gauss et polynômes orthogonaux

2. Approximation uniforme

2.1. Théorème de Stone-Weierstrass.

⟶ Théorème tauberien fort

2.2. Interpolation et polynômes de Tchebitchev.

2.3. Projection et meilleure approximation.

3. Application à la régularisation

3.1. Utilisation en calcul différentiel.

⟶ Théorème de Brouwer

3.2. Utilisation en analyse numérique.

3.2.1. *Polynômes de Bernstein.*

3.2.2. *Courbes de Bézier.*

3.2.3. *Fonctions splines.*

Développements

Méthode de Gauss et polynômes orthogonaux.

Théorème taubérien fort.

Théorème de Brouwer.

Références

[1] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 1996.

[2] G. Demengel et J.-P. Pouget, *Mathématiques des courbes et des surfaces. Modèles de Bézier, des B-splines et des NURBS. Outils pour l'ingénieur, bases pour la CAO*, Ellipses, 1998.

[3] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[4] J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.