Sébastien Pellerin

DÉVELOPPEMENTS D'ANALYSE POUR L'ORAL DE L'AGRÉGATION

Sébastien Pellerin

Institut Universitaire de Technologie de Marseille, Département Mesures Physiques, 142 traverse Charles Susini, B.P. 157, 13388 Marseille Cedex 13.

E-mail : sebastien.pellerin@univ.u-3mrs.fr

DÉVELOPPEMENTS D'ANALYSE POUR L'ORAL DE L'AGRÉGATION

Sébastien Pellerin

TABLE DES MATIÈRES

DÉVELOPPEMENT 1

APPLICATION DE LA FORMULE D'EULER-MACLAURIN

Formule d'Euler-MacLaurin. — *Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $2r+1\leq k$ alors*

$$f(m)+\cdots+f(n)=\int_m^n f(t)dt+\frac{1}{2}(f(m)+f(n))+\sum_{h=1}^{r}(-1)^{h-1}\frac{B_h}{(2h)!}\left(f^{(2h-1)}(n)-f^{(2h-1)}(m)\right)+R_r$$

où

$$R_r=\frac{1}{(2r+1)!}\int_0^1 b_{2r+1}(t)f^{(2r+1)}(t)dt$$

et B_n et b_h désignent respectivement les nombres et les polynômes de Bernoulli.

Lemme. — *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ à décroissance rapide et $\lambda,\mu\in]0,+\infty[$, on pose*

$$S_\lambda(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}f((n+\lambda)u)$$

alors quand u tend vers 0, on a

$$uS_\lambda(u)=\int_{\lambda u}^{+\infty}f(t)dt+\frac{u}{2}f(\lambda u)+\sum_{h=1}^{r}(-1)^h u^{2h}\frac{B_h}{(2h)!}f^{(2h-1)}(\lambda u)+O(u^{2h+2}).$$

Démonstration. — Puisque $x^2f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, il existe $M>0$ tel que $|f(x)|\leq\frac{M}{x^2}$ pour x assez grand. il s'ensuit que $|f((n+\lambda)u)|$ est majoré par $\frac{M}{(n+\lambda)^2u^2}$, pour n assez grand, qui est le terme général d'une série convergente. Donc $S_\lambda(u)$ converge absolument.

On pose $\varphi(x)=f((x+\lambda)u)$ alors $\varphi^{(n)}(x)=u^nf^{(n)}((x+\lambda)u)$ et la formule d'Euler-MacLaurin donne

$$\begin{aligned}\varphi(0)+\cdots+\varphi(n)=&\int_0^n\varphi(t)dt+\frac{1}{2}(f(\lambda u)+f((n+\lambda)u))\\&+\sum_{h=1}^{r}(-1)^{h-1}u^{2h-1}\frac{B_h}{(2h)!}\left(f^{(2h-1)}((n+\lambda)u)+f^{(2h-1)}(\lambda u)\right)+R_r\end{aligned}$$

où

$$R_r(\lambda,u)=\frac{1}{(2r+1)!}\int_0^1 b_{2r+1}(t)u^{2r+1}f^{(2r+1)}((t+\lambda)u)dt.$$

Or $\displaystyle\int_0^n\varphi(x)dx=\frac{1}{u}\int_{\lambda u}^{nu+\lambda u}f(t)dt$ donc

$$\begin{aligned}\varphi(0)+\cdots+\varphi(n)=&\frac{1}{u}\int_{\lambda u}^{nu+\lambda u}f(t)dt+\frac{1}{2}(f(\lambda u)+f((n+\lambda)u))\\&+\sum_{h=1}^{r}(-1)^{h-1}u^{2h-1}\frac{B_h}{(2h)!}\left(f^{(2h-1)}((n+\lambda)u)+f^{(2h-1)}(\lambda u)\right)+R_r\end{aligned}$$

et en faisant tendre n vers l'infini, il vient

$$S_\lambda(u) = \frac{1}{u}\int_{\lambda u}^{+\infty} f(t)dt + \frac{1}{2}f(\lambda u) + \sum_{h=1}^{r}(-1)^{h-1}u^{2h-1}\frac{B_h}{(2h)!}f^{(2h-1)}(\lambda u) + R_r.$$

Or pour tout $t \in [0,1]$, on a $|b_{2r+1}(t)| \leq (r+\frac{1}{2})B_r$ donc

$$|R_r(\lambda,u)| = \frac{B_r}{2(2r+1)!}u^{2r+1}\int_{\lambda u}^{+\infty}\left|f^{(2r+1)}(t)\right|dt$$

i.e. $R_r(\lambda,u) = O(u^{2r+1})$ et on a le résultat souhaité en multipliant par u. □

Application. — Soit $a,b,c,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ avec $a>0$. Si $|x|<1$ alors la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{an^2+bn+c}(1-x^{\alpha n+\beta})$$

converge et tend vers $\frac{\alpha}{2a}$ lorsque $x \to 1^-$.

Démonstration. — Pour n assez grand, on a $an^2+bn+c>n$ et $an^2+(b+\alpha)n+c+\beta>n$ *i.e.* $\left|x^{an^2+bn+c}(1-x^{\alpha n+\beta})\right| \leq 2x^n$ dès que $|x|<1$ donc la série converge. Pour $0<x<1$, on note $x=e^{-u^2}$ alors

$$x^{an^2+bn+c} = \exp\left(-a\left(n+\frac{b}{2a}\right)^2u^2\right)\exp\left(\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)u^2\right)$$

de sorte que l'on obtient une expression de la forme

$$f(x) = x^{h_1}S_{b/2a}(u) - x^{h_2}S_{(b+\alpha)/2a}(u).$$

Si on pose $\varphi(u)=e^{-au^2}$ alors le lemme donne

$$uf(x) = x^{h_1}\int_{bu/2a}^{+\infty}\varphi(t)dt - x^{h_2}\int_{(b+\alpha)u/2a}^{+\infty}\varphi(t)dt + x^{h_1}u\varphi(bu/2a) - x^{h_2}u\varphi((b+\alpha)u/2a) + O(u^2)$$

or $x^{h_1}=1+O(u^2)$ et $x^{h_2}=1+O(u^2)$ pour $u\to 0$ donc

$$f(x) = \frac{1}{u}\int_{bu/2a}^{(b+\alpha)u/2a}\varphi(t)dt + \varphi(bu/2a) - \varphi((b+\alpha)u/2a) + O(u)$$

donc

$$f(x) \xrightarrow[u\to 0]{} \frac{\alpha}{2a}.$$

□

Leçons concernées

18 Application des formules de Taylor et des développements limités

26 Développements asymptotiques d'une fonction d'une variable réelle

32 Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables

Référence

A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Analyse 1*, Masson, 1997.

Sébastien Pellerin

DÉVELOPPEMENT 2

SUR L'ESPACE DE BERGMAN

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{C}$, distinct de $\mathbb{C}$, et $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert.

Définition. — On appelle *espace de Bergman* sur Ω, l'espace $\mathrm{A}^2(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω qui sont dans $L^2(\Omega)$.

On considère sur $\mathrm{A}^2(\Omega)$ la norme $\| \ \|_2$ associée un produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega \overline{f(z)} g(z) dm(z) \ , \ f, g \in \mathrm{A}^2(\Omega).$$

Lemme. — *Soit $K \subset \Omega$ un compact et $f \in \mathrm{A}^2(\Omega)$, alors*

$$\max_{z \in K} |f(z)| \leq \frac{1}{d(K, \partial\Omega)\sqrt{\pi}} \|f\|_2 .$$

Démonstration. — Soit $D(a, r) \subset \Omega$ et $\rho \leq r$ alors la formule de Cauchy donne

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

d'où

$$f(a)\frac{r^2}{2} = \int_0^r f(a)\rho d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta})\rho d\rho d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{D(a,r)} f(z) dm(z).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \left[\int_{D(a,r)} |f(z)|^2 dz\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{D(a,r)} dz\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \left[\int_{D(a,r)} |f(z)|^2 dz\right]^{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(a, \partial\Omega)} \left[\int_{D(a,r)} |f(z)|^2 dz\right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(a, \partial\Omega)} \|f\|_2 .$$

Puisque $d(a, \partial\Omega) \geq d(K, \partial\Omega)$ pour tout $a \in K$, on a bien

$$\max_{a \in K} |f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(K, \partial\Omega)} \|f\|_2 .$$

□

Proposition. — $\mathrm{A}^2(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

Démonstration. — Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $\mathrm{A}^2(\Omega)$ et $K \subset \Omega$ compact alors

$$\max_{z \in K} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(K, \partial\Omega)} \|f_n - f_m\|_2$$

donc la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur K et, d'après le théorème de Weierstrass, il existe f holomorphe sur Ω qui est limite uniforme sur les compacts de Ω de la suite $(f_n)_n$. Par ailleurs, $L^2(\Omega)$ est complet donc $(f_n)_n$ admet une limite g dans $L^2(\Omega)$; il en résulte qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge presque partout vers g. Donc $f = g$ presque partout *i.e.* f est dans $L^2(\Omega)$. □

Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n.$$

Proposition. — *La suite $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$.*

Démonstration. — Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \overline{e_m(z)} e_n(z) dm(z) &= \sqrt{\frac{m+1}{\pi}}\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_{\mathbb{D}} \overline{z^n} z^m dm(z) \\
&= \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{\pi^2}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^{n+m+1} e^{i(n-m)\theta} d\rho d\theta \\
&= \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{\pi^2}} \frac{1}{n+m+2} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\
&= \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{\pi^2}} \frac{2\pi}{n+m+2} \delta_{n,m} \\
&= \sqrt{\frac{(m+1)^2}{\pi^2}} \frac{2\pi}{2m+2} \delta_{n,m} \\
&= \delta_{n,m}
\end{aligned}$$

i.e. $(e_n)_{n\geq 0}$ est une suite orthonormale.

Soit $f \in \mathrm{A}^2(\mathbb{D})$, on note $c_n(f) = \langle e_n, f\rangle$, montrons que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle e_n, f\rangle|^2 .$$

Puisque f est holomorphe sur $\mathbb{D}$, on peut écrire $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ dans $\mathbb{D}$, alors (par convergence dominée)

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_{\mathbb{D}} \overline{z}^n f(z) dm(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1^-} \int_{|z|<r} \overline{z}^n f(z) dm(z)$$

et par convergence uniforme de la série ci-dessus dans le disque $D(0,r)$, il vient

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \int_{|z|<r} \overline{z}^n z^k dm(z)$$

or

$$\int_{|z|<r} \overline{z}^n z^n dm(z) = \frac{2\pi r^{n+k+2}}{n+k+2} \delta_{k,n} = \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} \delta_{k,n}$$

d'où

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} \delta_{k,n} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \alpha_n \lim_{r\to 1^-} r^{2n+2} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \alpha_n.$$

D'autre part, on a

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dm(z) = \lim_{r\to 1^-} \int_{|z|<r} f(z) \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{\alpha_k z^k} dm(z) = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{\alpha_k} \int_{|z|<r} f(z) \overline{z}^k dm(z)$$

mais

$$\int_{|z|<r} f(z) \overline{z}^k dm(z) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell \frac{\pi r^{2k+2}}{k+1} \delta_{k,\ell} = \alpha_k \frac{\pi r^{2k+2}}{k+1}$$

d'où

$$\|f\|_2^2 = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\pi}{k+1} \overline{\alpha_k}\alpha_k r^{2k+2} = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k(f)|^2 r^{2k+2}.$$

Puisque $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |c_k(f)|^2 r^{2k+2} \leq \|f\|_2^2$ pour tout $0 < r < 1$, on peut conclure par convergence dominée. $\square$

Pour tout $(\zeta, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$, on pose $k(\zeta, z) = \dfrac{1}{\pi(1-\overline{\zeta}z)^2}$ et on note $k(\zeta, \cdot) : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, z \mapsto k(\zeta, z)$.

Proposition. — *On a $k(\zeta, \cdot) \in \mathrm{A}^2(\mathbb{D})$ et, pour tout $\zeta \in \mathbb{D}$ et tout $F \in \mathrm{A}^2(\mathbb{D})$,*

$$F(\zeta) = \int_{\mathbb{D}} \overline{k(\zeta, z)} F(z) dm(z).$$

Démonstration. — La fonction $k(\zeta, \cdot)$ est continue dans le disque $\{z; |z| \leq \frac{1}{\zeta}\}$ donc est de carré intégrable sur $\mathbb{D}$ et il s'agit clairement d'une fonction holomorphe donc $k(\zeta, \cdot) \in \mathrm{A}^2(\mathbb{D})$. Puisque $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne, on a

$$\langle k(\zeta, \cdot), F\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, F\rangle \langle k(\zeta, \cdot), e_n\rangle$$

d'où, en notant $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha_k z^k$ dans $\mathbb{D}$,

$$\langle k(\zeta, \cdot), F\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \alpha_n \langle k(\zeta, \cdot), e_n\rangle.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\langle k(\zeta, \cdot), e_n\rangle &= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{D}} \frac{z^n}{(1-\zeta\overline{z})^2} dm(z) = \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{D}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (\zeta\overline{z})^k \right)' z^n dm(z) \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{D}} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(\zeta\overline{z})^k z^n dm(z) = \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{3/2}} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\zeta^k \int_{\mathbb{D}} \overline{z}^k z^n dm(z) \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{3/2}} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\zeta^k \frac{2\pi}{2m+2} \delta_{n,k} = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \zeta^n
\end{aligned}$$

d'où

$$\langle k(\zeta, \cdot), F\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \alpha_n \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \zeta^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \zeta^n = F(\zeta)$$

i.e. $F(\zeta) = \displaystyle\int_{\mathbb{D}} \overline{k(\zeta, z)} F(z) dm(z)$. $\square$

Leçons concernées

01 Espaces de fonctions. Exemples et applications
02 Exemples de parties denses et applications
05 Espaces complets. Exemples et applications
09 Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités
12 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie
13 Bases hilbertiennes. Exemples et applications
33 Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$
34 Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications
38 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications
41 Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries
44 Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications
45 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$

Références

A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 3*, Dunod, 1996.
F. Bayen et C. Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*, Ellipses, 1986.

Sébastien Pellerin

DÉVELOPPEMENT 3

THÉORÈMES DE BROUWER ET DE SCHAUDER

Théorème de Brouwer. — *Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.*

Démonstration. — Supposons par l'absurde qu'il existe $f : B^n \to B^n$ continue sans point fixe.

• On peut supposer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. En effet, puisque B^n est compact, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in B^n,\ |f(x) - x| > \varepsilon.$$

D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ tel que

$$\forall x \in B^n,\ |f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$\forall x \in B^n,\ |P(x)| \leq |P(x) - f(x)| + |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + 1.$$

Si on pose $Q(x) = \dfrac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}} P(x)$ alors on a Q est polynômiale (et *a fortiori* de classe $\mathcal{C}^1$) telle que $Q(B^n) \subset B^n$. Enfin, pour tout $x \in B^n$, on a

$$|Q(x) - f(x)| \leq |Q(x) - P(x)| + |P(x) - f(x)| \leq (1 - \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}})\,|P(x)| + |P(x) - f(x)| < \varepsilon$$

donc

$$|Q(x) - x| \geq |f(x) - x| - |Q(x) - f(x)| > 0$$

i.e. $Q : B^n \to B^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sans point fixe.
On suppose donc désormais que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

• Il existe une application $\varphi : B^n \to S^{n-1}$ de classe $\mathcal{C}^1$. telle que $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in S^{n-1}$. En effet, on note $\varphi(x)$ le point d'intersection de S^{n-1} avec la demi-droite $[f(x), x)$ *i.e.* on a $\varphi(x) \in S^{n-1}$ et $\varphi(x) - f(x) = \lambda(x)\,(x - f(x))$ avec $\lambda(x) \geq 1$. Ainsi $\|f(x) + \lambda(x)\,(x - f(x))\|^2 = 1$ *i.e.*

$$\|f(x)\|^2 + 2\lambda(x)\langle f(x), x - f(x)\rangle + \lambda(x)^2\,\|x - f(x)\|^2 = 1$$

donc

$$\lambda(x) = \frac{-\langle f(x), x - f(x)\rangle + \sqrt{\Delta'}}{\|x - f(x)\|^2}$$

(on considère la racine ≥ 1) avec

$$\Delta' = \langle f(x), x - f(x)\rangle^2 + \|x - f(x)\|^2 \left(1 - \|f(x)\|^2\right) \geq 0.$$

Donc λ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur B^n et l'application φ est donc aussi de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, pour tout $x \in B^n$, on a $\|\varphi(x)\| = 1$. Enfin, si $x \in S^{n-1}$ alors $\lambda(x) = 1$ donc $\varphi(x) = x$.

• Pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in B^n$, on pose

$$\varphi_t(x) = (1-t)x + t\varphi(x) \quad \text{et} \quad P(t) = \int_{\overset{\circ}{B^n}} \det J_{\varphi_t}(x)dm(x).$$

Alors P est une application polynômiale en t.

• Pour tout $x \in B^n$, on a $\|\varphi(x)\|^2 = 1$ d'où $\langle \varphi(x), d\varphi_x(h)\rangle = 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. Donc $\mathrm{Im}\, d\varphi_x \subset \varphi(x)^\perp$ donc $\dim \mathrm{Im}\, d\varphi_x \leq n-1$ et, en particulier, $d\varphi_x$ n'est pas inversible *i.e.* $\det J_\varphi(x) = 0$. Comme $\varphi = \varphi_1$, cela signifie que $P(1) = 0$.

• Soit $t \in [0,1]$ et $x, y \in B^n$ tels que $\varphi_t(x) = \varphi_t(y)$ alors

$$(1-t)\|x-y\| = t\|\varphi(x) - \varphi(y)\|.$$

Puisque φ est de classe C^1, on peut poser $M = \sup\limits_{x \in B^n} \|d\varphi_x\|$ et le théorème de la moyenne donne

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq M\|x-y\|$$

i.e. lorsque $t \neq 1$

$$\|x-y\| \leq \frac{Mt}{1-t}\|x-y\|.$$

Si $\alpha = \dfrac{1}{1+M}$ et si $0 < t < \alpha$ alors $\dfrac{Mt}{1-t} < 1$ et on obtient une contradiction sauf si $x = y$. Ainsi, φ_t est injective pour $0 < t < \alpha$.

• Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in S^{n-1}$, on a $\varphi_t(x) = x$. Pour $0 < t < \alpha$, l'injectivité de φ_t implique donc que $\varphi_t(\overset{\circ}{B^n}) \subset \overset{\circ}{B^n}$.

• Puisque $\varphi_t(x) = (1-t)x + t\varphi(x)$, on a

$$\det J_{\varphi_t}(x) = a_n(x)t^n + \cdots + a_1(x)t + 1 = t(a_n(x)t^{n-1} + \cdots + a_1(x)) + 1$$

où les a_i sont des fonctions continues sur B_n. On pose

$$m = \sup_{\substack{x \in B^n \\ t \in [0,1]}} \left|a_n(x)t^{n-1} + \cdots + a_1(x)\right|$$

alors pour $t < \frac{1}{m}$ et tout $x \in B^n$, il vient $|a_n(x)t^n + \cdots + a_1(x)t| < 1$ d'où

$$\det J_{\varphi_t}(x) > 0$$

donc, pour $0 < t < \inf(\alpha, \frac{1}{m})$, φ_t est un difféomorphisme de $\overset{\circ}{B^n}$ sur l'ouvert $\varphi_t(\overset{\circ}{B^n})$ qui vérifie en outre $\det J_{\varphi_t}(x) > 0$.

• Si $y \notin \varphi_t(\overset{\circ}{B^n})$ alors $\|y\| < 1$ puisque $\varphi_t(x) = x$ pour tout $x \in S^{n-1}$. Soit $x \in \varphi_t(\overset{\circ}{B^n})$; puisque $\varphi_t(\overset{\circ}{B^n})$ est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $\mathbb{B}(x,\eta) \subset \varphi_t(\overset{\circ}{B^n})$ donc

$$\theta_0 = \sup\{\theta \in [0,1] \ ; \ \theta y + (1-\theta)x \in \varphi_t(\overset{\circ}{B^n})\} > 0.$$

et, pour la même raison, $\theta_0 y + (1-\theta_0)x \notin \varphi_t(\overset{\circ}{B^n})$. Soit $(\theta_p)_p$ une suite croissante tendant vers θ_0, on note

$$b_p = \theta_p y + (1-\theta_p)x = \varphi_t(y_p) \text{ avec } y_p \in \overset{\circ}{B^n}.$$

Puisque B^n est compact, il existe une sous-suite $(y_{\sigma(p)})_p$ qui tend vers $y_0 \in B^n$. En passant à la limite et par continuité de φ_t, il vient $\varphi_t(y_0) = \theta_0 y + (1-\theta_0)x$. Puisque $\theta_0 y + (1-\theta_0)x \notin \varphi_t(\overset{\circ}{B^n})$, on a $\|y_0\| = 1$ mais φ_t est l'identité sur S^{n-1} donc $\|\theta_0 y + (1-\theta_0)x\| = 1$. Il en résulte que $\|y\| = 1$ *i.e.* on a une contradiction.

• Enfin, pour t petit, on a par la formule de changement de variables

$$P(t) = \int_{\overset{\circ}{B^n}} \det J_{\varphi_t}(x)\,dm(x) = \int_{\overset{\circ}{B^n}} |\det J_{\varphi_t}(x)|\,dm(x) = \int_{\varphi_t(\overset{\circ}{B^n})} dm = \int_{\overset{\circ}{B^n}} dm$$

i.e. $P(t)$ est une fonction polynômiale qui est constante égale au volume de B^n pour t petit. Donc P est constante or $P(1) = 0$ donc on obtient que le volume de B^n est nul ce qui est absurde. $\square$

Corollaire. — *Toute application continue $f : C \to C$, où C est un convexe compact de $\mathbb{R}^n$, admet un point fixe.*

Démonstration. — Il existe $R > 0$ tel que $C \subset \overline{\mathbb{B}}(0, R)$. Puisque C est un convexe compact, il existe une projection $\pi : \overline{\mathbb{B}}(0, R) \to C$. On note i l'injection de C dans $\overline{\mathbb{B}}(0, R)$, alors l'application $i \circ f \circ \pi : \overline{\mathbb{B}}(0, R) \to \overline{\mathbb{B}}(0, R)$ est continue donc il existe $x \in \overline{\mathbb{B}}(0, R)$ tel que $(i \circ f \circ \pi)(x) = x$ *i.e.* $f(\pi(x)) = x$. Comme f est à valeurs dans C, on a donc $x \in C$ *i.e.* $x = \pi(x)$ et f admet donc bien un point fixe. □

Théorème de Schauder. — *Toute application continue $f : C \to C$, où C est un convexe compact d'un espace de Banach E, admet un point fixe.*

Démonstration. — • Soit $\varepsilon > 0$, on recouvre C par des boules $\mathbb{B}(y_1, \varepsilon), \ldots, \mathbb{B}(y_p, \varepsilon)$ et on note F le sous-espace $\langle y_1, \ldots, y_p \rangle$. D'après le théorème de partition de l'unité, il existe $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact ($\varphi_i : \overline{\mathbb{B}(y_i, \varepsilon)} \to \mathbb{R}^+$) telles que $\varphi_1(x) + \cdots + \varphi_p(x) = 1$ pour tout $x \in C$. On définit alors $\pi_\varepsilon : C \to F_\varepsilon$ par

$$\pi_\varepsilon(x) = \varphi_1(x)y_1 + \cdots + \varphi_p(x)y_p$$

et en fait π_ε est à valeurs dans $C \cap F_\varepsilon$ puisque $\pi_\varepsilon(x)$ est combinaison convexe de points de C. L'application π_ε est continue puisque les φ_i sont continues. Enfin, pour tout $x \in C$, on a

$$\|\pi_\varepsilon(x) - x\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)y_i - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)x \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)(y_i - x) \right\|$$

or $\varphi_i(x) = 0$ pour $x \notin \overline{\mathbb{B}}(y_i, \varepsilon)$ donc $\varphi_i(x) \|y_i - x\| \leq \varepsilon\varphi_i(x)$ pour tout $1 \leq i \leq p$ et tout $x \in C$, d'où

$$\|\pi_\varepsilon(x) - x\| \leq \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x) \|y_i - x\| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x) = \varepsilon.$$

• Pour tout $\varepsilon > 0$, on note i_ε l'injection de $F_\varepsilon \cap C$ (qui est un convexe compact de dimension finie) dans C alors on peut appliquer le corollaire précédent à $\pi_\varepsilon \circ f \circ i_\varepsilon$ donc il existe $x_\varepsilon \in F_\varepsilon \cap C$ tel que $(\pi_\varepsilon \circ f \circ i_\varepsilon)(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$ donc

$$\|x_\varepsilon - f(x_\varepsilon)\| = \|\pi_\varepsilon((f \circ i_\varepsilon)(x_\varepsilon)) - (f \circ i_\varepsilon)(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in C$ tel que $\|x_\varepsilon - f(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$ et comme C est compact, on en déduit qu'il existe une suite $(x_k)_k$ de C qui converge vers un point $x \in C$ et qui vérifie $\|x_k - f(x_k)\| \leq \frac{1}{k}$ pour tout $k \geq 1$. Par continuité de f, il vient donc $f(x) = x$. □

Leçons concernées

03 Utilisation de la notion de compacité

06 Utilisation de théorèmes de point fixe

11 Utilisation de la dimension finie en analyse

12 Méthodes hilbertiennes en dimension finie ou infinie

14 Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites

15 Différentiabilité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

48 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales ou polynômiales par morceaux. Exemples

Compléments

Le théorème de Cauchy-Peano. —

Théorème. — *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in I \times \mathcal{U}$ et $f : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors le problème de Cauchy*

$$X' = f(t, X) \quad \textit{et} \quad X(t_0) = x_0$$

admet au moins une solution locale.

Démonstration. — Soit $r, M > 0$ tels que

$$\overline{\mathbb{B}}(x_0, r) \subset \mathcal{U} \ , \ J = [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}] \subset I \ \text{ et } \sup_{(t,x) \in J \times \overline{\mathbb{B}}(x_0,r)} \|f(t, x)\| \leq M.$$

On note alors

$$\mathcal{A} = \{f : J \to \overline{\mathbb{B}}(x_0, r) \ M - \text{lipschitzienne avec } f(t_0) = x_0\}$$

et pour $x \in \mathcal{A}$ et $t \in J$

$$\widehat{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Le problème de Cauchy revient à trouver une solution locale de l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

i.e. à chercher un point fixe de l'opérateur

$$T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, x \mapsto \widehat{x}.$$

Si $x \in \mathcal{A}$ et $t \in J$ alors

$$\|\widehat{x}(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \right\| \leq M\,|t - t_0| < r$$

et si $u, v \in J$ alors

$$\|\widehat{x}(u) - \widehat{x}(v)\| = \left\| \int_{u}^{v} f(s, x(s))ds \right\| \leq M\,|v - u|$$

donc $\widehat{x} \in \mathcal{A}$ *i.e.* l'opérateur T est bien défini. On vérifie aisément que $\mathcal{A}$ est convexe et, au moyen du théorème d'Ascoli, on vérifie que $\mathcal{A}$ est compact. Il reste donc à montrer que T est continu. Soit $x, y \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$, puisque f est uniformément continue sur $J \times \overline{\mathbb{B}}(x_0, r)$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|x - y\| \leq \eta \Rightarrow \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \frac{\varepsilon}{r}.$$

On en déduit que si $\|x - y\| \leq \eta$ on a alors

$$\|\widehat{x}(t) - \widehat{y}(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|\,ds \leq \varepsilon$$

i.e. T est continu. □

Champ rentrant dans la sphère. —

Théorème. — *Si $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application continue telle que $\langle x, V(x)\rangle < 0$ pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ alors V s'annule en au moins un point de la boule unité.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$, on considère l'application continue

$$f_\varepsilon : \overline{\mathbb{B}}(0, 1) \to \mathbb{R}^n, x \mapsto x + \varepsilon V(x)$$

alors

$$\|f_\varepsilon(x)\|^2 = \|x\|^2 + \varepsilon^2 \|V(x)\|^2 + 2\varepsilon\langle x, V(x)\rangle.$$

Puisque le champ V est continu sur la boule unité fermée, on peut considérer le maximum de sa norme d'où

$$\|f_\varepsilon(x)\|^2 \leq \|x\|^2 + \varepsilon^2 \|V\|^2_{\overline{\mathbb{B}}(0,1)} + 2\varepsilon\langle x, V(x)\rangle.$$

L'application $x \mapsto \langle x, V(x) \rangle$ est continue sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ qui est compacte donc cette application est bornée et atteint son maximum en un point $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ donc

$$\eta = \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \langle x, V(x) \rangle = \langle x_0, V(x_0) \rangle < 0.$$

On en déduit qu'il existe $0 < \delta_0 < 1$ tel que, en notant $C(\delta_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; 1 - \delta_0 \leq \|x\| \leq 1\}$, on ait

$$\sup_{x \in C(\delta_0)} \langle x, V(x) \rangle < \frac{\eta}{2} < 0$$

d'où

$$\sup_{x \in C(\delta_0)} \|f_\varepsilon(x)\|^2 \leq 1 + \varepsilon^2 \|V\|^2_{\mathbb{B}(0,1)} + \varepsilon\eta.$$

Si ε est choisi de sorte que $0 < \varepsilon < \frac{-\eta}{\|V\|^2_{\mathbb{B}(0,1)}}$ alors on a

$$\sup_{x \in C(\delta_0)} \|f_\varepsilon(x)\|^2 \leq 1.$$

D'autre part, si $\|x\| \leq 1 - \delta_0$ alors

$$\sup_{x \in \overline{\mathbb{B}}(0,1-\delta_0)} \|f_\varepsilon(x)\|^2 \leq (1 - \delta_0)^2 + \varepsilon^2 \|V\|^2_{\mathbb{B}(0,1)} + 2\varepsilon \|V\|_{\mathbb{B}(0,1)} .$$

Si ε est aussi choisi de sorte que $0 < \varepsilon < \frac{\delta_0}{4\|V\|_{\mathbb{B}(0,1)}}$ alors on a

$$\sup_{x \in \overline{\mathbb{B}}(0,1-\delta_0)} \|f_\varepsilon(x)\|^2 \leq 1.$$

Ainsi pour $\varepsilon > 0$ choisi assez petit, on a

$$f_\varepsilon\left(\overline{\mathbb{B}}(0,1)\right) \subset \overline{\mathbb{B}}(0,1).$$

D'après le théorème de Brouwer, l'application f_ε admet un point fixe *i.e.* il existe $y_0 \in \overline{\mathbb{B}}(0,1)$ tel que $f_\varepsilon(y_0) = y_0$ donc $y_0 + \varepsilon V(y_0) = y_0$ et il s'ensuit que $V(y_0) = 0$. □

Une application géométrique. —

Théorème. — *Soit Δ un triangle du plan de sommets a, b et c. Si Δ est la réunion de trois fermés F_a contenant $[a,b]$, F_b contenant $[b,c]$ et F_c contenant $[c,a]$, alors F_a, F_b et F_c ont un point en commun.*

Démonstration. — On identifie le plan à la droite complexe. Si F_a, F_b et F_c n'ont pas de point en commun alors les réels $d(h, F_a), d(h, F_b)$ et $d(h, F_c)$ ne sont pas tous nuls donc, à tout point h, on peut associer le barycentre $g = \phi(h)$ des points a, b et c munis respectivement des poids $d(h, F_a), d(h, F_b)$ et $d(h, F_c)$. Ces poids étant tous positifs, on définit ainsi une application continue

$$\phi : \Delta \to \Delta, h \mapsto \phi(h) = g.$$

Puisque Δ est un convexe compact du plan, l'application ϕ admet un point fixe h_0 *i.e.* on a

$$d(h_0, F_a)(h_0 - a) + d(h_0, F_b)(h_0 - b) + d(h_0, F_c)(h_0 - c) = 0.$$

Puisque Δ est la réunion des trois fermés F_a, F_b et F_c, le point h_0 appartient à l'un de ces fermés, par exemple F_a ; on a donc $d(h_0, F_a) = 0$ d'où

$$d(h_0, F_b)(h_0 - b) + d(h_0, F_c)(h_0 - c) = 0.$$

On en déduit que h_0 appartient au segment $[b, c]$ donc, en particulier, au fermé F_b *i.e.* $d(h_0, F_b) = 0$ d'où

$$d(h_0, F_c)(h_0 - c) = 0$$

i.e. $h_0 = c$ et il s'ensuit que $h_0 \in F_c$ ce qui contredit le fait que $h_0 \in F_a \cap F_b$ et l'hypothèse de départ. □

Une application en algèbre linéaire. —

Théorème. — *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à coefficients positifs alors $\rho(A)$ est une valeur propre associée à un vecteur propre positif.*

Démonstration. — Soit λ une valeur propre de modulo $\rho(A)$ et V un vecteur propre associé de norme 1 alors

$$\rho(A)\,|V| = |\lambda V| = |AV| \leq A\,|V|$$

(où $|X|$ désigne le vecteur dont les coodonnées sont les valeurs absoluees des coordonnées de X) donc

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n \ ; \ X \geq 0 \ , \ \|X\|_1 = 1 \ , \ \rho(A)X \leq AX\}$$

est non vide. De plus, on peut supposer que $\rho(A) > 0$ (sinon le résultat est clair) d'où $AX \neq 0$ pour tout $X \in S$. On considère l'application

$$f : S \to \mathbb{R}^n, X \mapsto f(X) = \frac{AX}{\|AX\|_1}$$

alors, pour tout $X \in S$, on a $f(X) \geq 0$, $\|f(X)\|_1 = 1$ et

$$Af(X) = \frac{1}{\|AX\|_1}A^2X \geq \frac{1}{\|AX\|_1}A(\rho(A)X) = \rho(A)f(X)$$

i.e. $f(S) \subset S$. Or f est continue et S est convexe compact donc le théorème de Brouwer implique qu'il existe $Y \in S$ vérifiant $f(Y) = Y$ *i.e.* $AY = \|AY\|_1 Y$. Comme $Y \in S$, on a $\rho(A)Y \leq AY = \|AY\|_1 Y$ mais $Y \geq 0$ donc $\rho(A) \leq \|AY\|_1$ d'où $\rho(A) = \|AY\|_1$. □

Références

A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse 1*, Masson, 2è éd., 1997.

A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 2*, Dunod, 1999.

S. Gonnord et N. Tosel, *Calcul différentiel*, Ellipses, 1998.

A. Monier, Deux démonstration du théorème de Brouwer, disponible à

`www.ens-lyon.fr/JME/Vol1Num4/MonierJME4/MonierJME4.html`

I. Nourdin, *Leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie*, Dunod, 2001.

A. Pommellet, *Agrégation de matématiques, Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

D. Serre, *Les matrices. Théorie et pratique*, Dunod, 2001.

DÉVELOPPEMENT 4

VECTEURS PROPRES DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER DANS L^2

Lemme. — *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable non nulle presque partout et telle qu'il existe $\delta > 0$ vérifiant $f = O(e^{-\delta|x|})$. Alors* $\mathrm{Vect}(x^n f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. — Si $\mathrm{Vect}(x^n f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dense dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ alors il existe $h \in L^2(\mathbb{R})$ non nulle presque partout telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)h(x)dx = 0.$$

L'inégalité de Cauhcy-Schwarz donne $fh \in L^1(\mathbb{R})$ donc on peut considérer sa transformée de Fourier

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)e^{-i\xi x}dx.$$

Si $0 < \xi < \delta$ alors $e^{\xi|x|}f(x)h(x) \in L^1(\mathbb{R})$ d'après l'hypothèse sur f donc (en utilisant le théorème d'holomorphie sous le signe somme) g se prolonge analytiquement sur la bande $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}\ (z) < \delta\}$. D'après la propriété vérifiée par h et en utilisant le théorème de dérivation de la transformée de Fourier, on obtient que toutes les dérivées de g sont nulles en 0. D'après l'analyticité de g, g est identiquement nulle et l'injectivité de la transformation de Fourier donne $fh = 0$ presque partout, c'est absurde puisque f et h sont toutes deux non nulles presque partout. $\square$

La dérivée d'ordre n de $H(t) = e^{-t^2}$ est de la forme $e^{-t^2}H_n(t)$ où $H_n(t)$ est un polynôme appelé *polynôme de Hermite*, déterminé par la relation de récurrence $H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) + H_n'(t)$, de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$. Les *fonctions de Hermite* sont alors définies par

$$h_n(t) = (n!2^n\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}H_n(t)e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Proposition. — *La famille $(h_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(e^{-t^2}dt)$.*

Démonstration. — Si P est un polynôme de degré au plus $n-1$ alors une intégration par parties donne (par définition de H_n et puisque $P^{(n)} = 0$)

$$\int_{\mathbb{R}} P(t)H_n(t)e^{-t^2}dt = \int_{\mathbb{R}} P(t)H^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} P^{(n)}(t)H(t)dt = 0$$

ce qui montre que la famille $(h_n)_n$ est orthogonale. La formule d'intégration par parties donne

$$\int_{\mathbb{R}} (H_n(t))^2e^{-t^2}dt = \int_{\mathbb{R}} H_n(t)H^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} H_n^{(n)}(t)e^{-t^2}dt$$

d'où puisque le coefficient dominant de H_n est $(-2)^n$

$$\int_{\mathbb{R}} (H_n(t))^2e^{-t^2}dt = 2^n n! \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = 2^n n!\sqrt{\pi}$$

donc $(h_n)_n$ est bien une famille orthonormale. Puisque les polynômes H_n sont de degré échelonnés, il découle du lemme que la famille $(h_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. $\square$

Proposition. — $\widehat{h_n} = \sqrt{2\pi}(-i)^n h_n$

Démonstration. — On rappelle que la gaussienne $G(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ vérifie $\widehat{G}(x) = \sqrt{2\pi}G(x)$ *i.e.*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On remplace t par $t + 2u$ alors

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2+4ut+4u^2}{2}} e^{-itx} e^{-2iux} dt = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

i.e.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-2ut-u^2} e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} e^{u^2} e^{2iux} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{t^2}{2}} H(t+u) e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} e^{u^2} e^{2iux} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} H(iu - x) e^{\frac{x^2}{2}}$$

et cette intégrale est une fonction holomorphe en u donc on peut dériver de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{du^n} \left[H(t+u)\right] e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} \frac{d^n}{du^n} \left[H(iu - x) e^{\frac{x^2}{2}}\right]$$

et pour $u = 0$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} \frac{d^n}{du^n} \left[H(iu - x) e^{\frac{x^2}{2}}\right]_{u=0} = \sqrt{2\pi} i^n H_n(-x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

i.e. en tenant compte de la parité de H_n

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} i^n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

d'où $\widehat{h_n(x)} = \sqrt{2\pi} i^n h_n(x)$. □

Leçons concernées

01 Espaces de fonctions. Exemples et applications
02 Exemples de parties denses et applications
10 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications
12 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie
13 Bases hilbertiennes. Exemples et applications
33 Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$
38 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications
39 Transformation de Fourier et produit de convolution

Référence

A. Kolmogorov, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Mir Ellipses, 1994.

Sébastien Pellerin

DÉVELOPPEMENT 5

DUAL DE $L^p([0,1],dx)$ POUR $1<p<2$

On considère un entier $1<p<2$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Lemme. — *Si $f \in L^2([0,1],dx)$ alors $f \in L^p([0,1],dx)$ et $\|f\|_p \leq \|f\|_2$.*

Démonstration. — Puisque $1<p<2$, on a $\frac{2}{p}>1$, soit r tel que $\frac{p}{2}+\frac{1}{r}=1$. On applique alors l'inégalité de Hölder à $|f|^p\, \mathbb{1}_{[0,1]}$ de sorte que

$$\left\| |f|^p\, \mathbb{1}_{[0,1]} \right\|_1 \leq \| |f|^p \|_{\frac{2}{p}} \left\| \mathbb{1}_{[0,1]} \right\|_r \leq \| |f|^p \|_{\frac{2}{p}}$$

i.e.

$$\int_0^1 |f|^p \leq \left(\int_0^1 (|f|^p)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2}} = \|f\|_2^p$$

d'où $f \in L^p$ et $\|f\|_p \leq \|f\|_2$. $\square$

Proposition. — *L'application $g \mapsto T_g$, où $T_g(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$, définit une isométrie linéaire de L^q sur $(L^p)'$.*

Démonstration. — Si $g \in L^q$ et $f \in L^p$ alors l'inégalité de Hölder donne

$$|T_g(f)| \leq \|g\|_q \|f\|_p$$

donc $T_g \in (L^p)'$ et $\|\!|T_g|\!\| \leq \|g\|_q$.

On considère u mesurable de module 1 telle que $g = u\,|g|$ et on pose $\varphi = \overline{u}\,|g|^{q-1}$. Comme $q = p(q-1)$, on a

$$\|\varphi\|_p^p = \int_0^1 |g|^{(q-1)p} = \int_0^1 |g|^q$$

d'où $\varphi \in L^p$ et il s'ensuit

$$\|T_g(\varphi)\| \leq \|\!|T_g|\!\| \, \|\varphi\|_p$$

i.e.

$$\int_0^1 |g|^q \leq \|\!|T_g|\!\| \left(\int_0^1 |g|^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

d'où

$$\|\!|T_g|\!\| \geq \left(\int_0^1 |g|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_q\,.$$

Ainsi $g \mapsto T_g$ est une isométrie de L^q dans $(L^p)'$.

Montrons que cette isométrie est surjective. Soit $\ell \in (L^p)'$. D'après le lemme, on a $L^2 \subset L^p$ donc on peut considérer la restriction ψ de ℓ à L^2. Pour tout $f \in L^2$, on a

$$|\psi(f)| \leq \|\!|\ell|\!\|_p \, \|f\|_p \leq \|\!|\ell|\!\|_p \, \|f\|_2$$

i.e. $\psi \in (L^2)'$. Puisque L^2 est de Hilbert, il existe $g \in L^2$ telle que

$$\forall f \in L^2, \ell(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Pour conclure, il reste à montrer que $g \in L^q$ et que l'égalité précédente est vraie pour tout $f \in L^p$. Comme plus haut, on note $g = u\,|g|$ et, pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n = \overline{u}\,|g|^{q-1}\,\mathbb{1}_{\{|g|\leq n\}}$ de sorte que $f \in L^\infty$ et *a fortiori* $f \in L^2$. On a

$$\int |g|^q\,\mathbb{1}_{\{|g|\leq n\}} = \ell(f_n) \leq |||\ell|||_p\,\|f_n\|_p = |||\ell|||_p \left(\int |g|^q\,\mathbb{1}_{\{|g|\leq n\}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

d'où

$$\left(\int |g|^q\,\mathbb{1}_{\{|g|\leq n\}}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int |g|^q\,\mathbb{1}_{\{|g|\leq n\}}\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq |||\ell|||_p.$$

D'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int |g|^q\,\mathbb{1}_{\{|g|\leq n\}}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^1 |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_q$$

donc $g \in L^q$ et $\|g\|_q \leq |||\ell|||$. Ainsi, on a

$$\forall f \in L^2, \ell(f) = T_g(f).$$

Les applications ℓ et T_g sont continues sur L^p or L^2 est dense dans L^p donc

$$\forall f \in L^p, \ell(f) = T_g(f)$$

i.e. $\ell = T_g$. □

Leçons concernées

01 Espaces de fonctions. Exemples et applications
05 Espaces complets. Exemples et applications
10 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications
12 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie
33 Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$

Référence

H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

DÉVELOPPEMENT 6

ÉTUDE NUMÉRIQUE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Soit $c, f \in \mathcal{C}([0,1])$, on cherche $u \in \mathcal{C}^4([0,1])$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \quad \text{et} \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

On suppose en outre que $c \geq 0$.

Soit $N \geq 1$ un entier et $h = \frac{1}{N+1}$, on définit un *maillage uniforme* de $[0,1]$ de pas h en posant $x_i = ih$ pour $0 \leq i \leq N+1$. On cherche une approximation de la solution φ aux x_i *i.e.* on cherche un vecteur $u_h \in \mathbb{R}^N$ voisin de $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_N))^t$.

Si $\varphi \in \mathcal{C}^4([0,1])$ alors la formule de Taylor-Lagrange appliquée en x_i pour $1 \leq i \leq N$ donne

$$\varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i) + h\varphi'(x_i) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x_i) + \frac{h^3}{6}\varphi^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i^+ h)$$

$$\varphi(x_{i-1}) = \varphi(x_i) - h\varphi'(x_i) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x_i) - \frac{h^3}{6}\varphi^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i^- h)$$

où $-1 < \theta_i^- < 0 < \theta_i^+ < 1$, d'où

$$-\varphi(x_{i+1}) + 2\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) = -h^2\varphi''(x_i) - \frac{h^4}{24}\left(\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i^+ h) + \varphi^{(4)}(x_i + \theta_i^- h)\right).$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a

$$\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i^+ h) + \varphi^{(4)}(x_i + \theta_i^- h) = 2\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i h)$$

avec $|\theta_i| < 1$, d'où

$$-\varphi''(x_i) = \frac{-\varphi(x_{i+1}) + 2\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})}{h^2} + \frac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i h).$$

Pour $1 \leq i \leq N$, on pose $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $c_i = c(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$, le fait que φ soit solution du problème s'exprime alors par (on utlise les conditions aux limites)

$$\begin{cases} \frac{-\varphi_2 + 2\varphi_1}{h^2} + c_1\varphi_1 = f_1 - \frac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_1 + \theta_1 h) \\ \frac{-\varphi_{i+1} + 2\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h^2} + c_i\varphi_i = f_i - \frac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i h) \quad 2 \leq i \leq N-1 \\ \frac{2\varphi_N - \varphi_{N-1}}{h^2} + c_N\varphi_N = f_N - \frac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_N + \theta_N h) \end{cases}$$

i.e. on a matriciellement

$$A_h\varphi_h = b_h + \varepsilon_h(\varphi)$$

où

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 + c_1h^2 & -1 & & & \\ -1 & 2 + c_2h^2 & -1 & & \\ & & & & \\ & & -1 & 2 + c_{N-1}h^2 & -1 \\ & & & -1 & 2 + c_Nh^2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_h = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{bmatrix} \ , \ b_h = \begin{bmatrix} f_1 + \alpha/h^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N + \alpha/h^2 \end{bmatrix} \ , \ \varepsilon_h(\varphi) = -\frac{h^2}{12} \begin{bmatrix} \varphi^{(4)}(x_1 + \theta_1 h) \\ \vdots \\ \varphi^{(4)}(x_N + \theta_N h) \end{bmatrix}.$$

Lemme. — *Si $c \geq 0$ alors la matrice A_h est inversible et $A_h^{-1} \geq 0$.*

Démonstration. — Notons que si $v \geq 0$ dès que $Av \geq 0$ alors A est inversible avec $A^{-1} \geq 0$ (la réciproque est vrai). En effet, si $Ax = 0$ alors $A(\pm x) \geq 0$ donc $\pm x \geq 0$ *i.e.* $x = 0$ et A est donc inversible. Le j-è vecteur colonne de A^{-1} est $b = A^{-1}e_j$ (où e_j est le j-è vecteur de la base canonique) mais $Ab = e_j \geq 0$ donc $b \geq 0$ et A^{-1} est donc bien positive.

Soit v tel que $A_h v \geq 0$, il s'agit de montrer que $v \geq 0$. Soit p tel que $v_p \leq v_i$ pour tout i. Si $p = 1$ alors on a

$$0 \leq (2 + c_1 h^2)v_1 - v_2 \leq (1 + c_1 h^2)v_1,$$

si $p = N$ alors on a

$$0 \leq -v_{N-1} + (2 + c_N h^2)v_N \leq (1 + c_N h^2)v_N$$

et si $2 \leq p \leq N-1$ alors on a

$$0 \leq -v_{p-1} + (2 + c_p h^2)v_p - v_{p+1} \leq c_p h^2 v_p.$$

On a donc le résultat voulu sauf si $c_i = 0$ pour un indice $2 \leq i \leq N-1$ mais dans ce cas on remarque ce le raisonnement ci-dessus fonctionne avec $A_h + \alpha \mathrm{Id}_N$ pour tout $\alpha > 0$, on obtient donc le résultat par continuité de l'application $\alpha \mapsto (A_h + \alpha \mathrm{Id}_N)^{-1}$. □

On note $u_h \in \mathbb{R}^n$ une solution du problème matriciel associé et on suppose que $c \geq 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}^4([0,1])$.

Proposition. — $\displaystyle\max_{1 \leq i \leq N} |u_i - \varphi(x_i)| \leq \frac{h^2}{96} \left\| \varphi^{(4)} \right\|_\infty$

Démonstration. — On a $A_h \varphi_h = b_h + \varepsilon_h(\varphi)$ et $A_h u_h = b_h$ d'où

$$\varphi_h - u_h = A_h^{-1} \varepsilon_h(\varphi) = -\frac{h^2}{12} A_h^{-1}(\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i h)_{1 \leq i \leq N}$$

et il en découle

$$\max_{1 \leq i \leq N} |u_i - \varphi(x_i)| \leq \frac{h^2}{12} \left\| A_h^{-1} \right\|_\infty \left\| \varphi^{(4)} \right\|_\infty.$$

On considère la matrice $A_{oh} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$ qui correspond à $c = 0$. D'après le lemme, on a $A_h^{-1} \geq 0$ et $A_{oh}^{-1} \geq 0$; de plus, on a $A_h - A_{oh} = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_N) \geq 0$ d'où

$$A_{oh}^{-1} - A_h^{-1} = A_{oh}^{-1}(A_h - A_{oh})A_h^{-1} \geq 0$$

et il s'ensuit (du fait de l'expression de la norme induite $\| \ \|_\infty$) que $\left\| A_h^{-1} \right\|_\infty \leq \left\| A_{oh}^{-1} \right\|_\infty$ d'où

$$\max_{1 \leq i \leq N} |u_i - \varphi(x_i)| \leq \frac{h^2}{12} \left\| A_{oh}^{-1} \right\|_\infty \left\| \varphi^{(4)} \right\|_\infty.$$

Si $e = (1 \cdots 1)^t \in \mathbb{R}^N$ alors $\left\| A_{oh}^{-1} \right\|_\infty = \left\| A_{oh}^{-1} e \right\|_\infty$ puisque $A_{oh}^{-1} \geq 0$ mais $A_{oh}^{-1} e$ est la solution du problème discret associé au problème aux limites

$$-u''(x) = 1 \ , \ u(0) = u(1) = 0$$

dont une solution est donnée par $\psi(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$. Comme ψ est polynômiale de degré 3, on a $\varepsilon_h(\psi) = 0$ donc $(A_{oh}^{-1} e)_i = \psi(x_i)$ pour tout i et il s'ensuit que

$$\left\| A_{oh}^{-1} e \right\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |\psi(x_i)| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |\psi(t)| = \frac{1}{8}$$

d'où $\left\| A_{oh}^{-1} \right\|_\infty \leq \frac{1}{8}$ et le résultat en découle. □

Sébastien Pellerin

Leçons concernées

18 Application des formules de Taylor et des développements limités

22 Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées

Référence

P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 1998.

Sébastien Pellerin

DÉVELOPPEMENT 7

ÉTUDE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y'' + q(t)y = 0$

On considère l'équation différentielle (L) : $y'' + q(t)y = 0$.

Proposition. — *Si $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue et telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |q(t)|\,dt$ converge alors*

(i) toute solution bornée y vérifie $y' \xrightarrow[+\infty]{} 0$,

(ii) (L) admet des solutions non bornées.

Démonstration. — On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} y''(t)dt = -\int_0^{+\infty} q(t)y(t)dt$ or y est bornée et l'intégrale $\int_0^{+\infty} |q(t)|\,dt$ converge donc y' admet une limite en $+\infty$. Supposons que cette limite soit $\alpha \neq 0$, alors $y'(t) \sim \alpha$ en $+\infty$ donc $\int_0^x y'(t)dt \sim \int_0^x \alpha dt$ *i.e.* $y(x) \sim \alpha x$ en $+\infty$ ce qui est absurde puisque y est bornée.

Soit (u, v) une base de solutions de (L). Si (L) n'admet que des solutions bornées alors u' et v' tendent vers 0 en $+\infty$ donc le wronskien $uv' - u'v$ tend aussi vers 0. Le wronskien de deux solutions f, g de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ est donné par

$$\text{wronskien}(f, g)(t) = \text{wronskien}(f, g)(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t p(s)ds\right)$$

donc, dans le cas de (L), le wronskien de u et v est constant donc est nul (puisqu'il tend vers 0). C'est absurde puisque u et v forment une base de solutions donc (L) a des solutions bornées. $\square$

Proposition. — *Si $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive et croissante alors toutes les solutions de (L) sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.*

Démonstration. — Soit y une solution de (L) sur $\mathbb{R}^+$, on a $2y'y'' + 2q(t)y(t)y'(t) = 0$ d'où en intégrant

$$\forall t \geq 0\ ,\ y'(t)^2 - y'(0)^2 + 2\int_0^t q(s)y(s)y'(s)ds = 0$$

puis en intégrant par parties, il vient

$$\forall t \geq 0\ ,\ y'(t)^2 + q(t)y(t)^2 = y'(0)^2 + q(0)y(0)^2 + \int_0^t q'(s)y(s)^2 ds$$

d'où (en notant $K = y'(0)^2 + q(0)y(0)^2$)

$$\forall t \geq 0\ ,\ q(t)y(t)^2 \leq K + \int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)} q(s)y(s)^2 ds.$$

D'après le lemme de Gronwall, on a

$$\forall t \geq 0\ ,\ q(t)y(t)^2 \leq K \exp\left(\int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)} ds\right) = K\frac{q(t)}{q(0)}$$

i.e. $y(t)^2 \leq \frac{K}{q(0)}$ pour tout $t \geq 0$. $\square$

Proposition. — *Si $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et strictement négative sur $\mathbb{R}$ alors*

(i) la fonction nulle est la seule solution réelle bornée sur $\mathbb{R}$,

(ii) une solution non nulle s'annule au plus une fois.

Démonstration. — Soit f une solution de (L) sur $\mathbb{R}$, on pose $z = f^2$, alors $z'' = 2ff'' + (f')^2$ *i.e.* on a $z'' = 2q(t)f^2 + (f')^2$ donc $z'' \geq 0$ et il en résulte que la fonction z est convexe. Il y a deux cas possibles :

– Si z est constante alors f est constante donc nulle.

– Sinon, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $z'(t_0) \neq 0$ or z est convexe donc sa courbe représentative est au-dessus de sa tangente en t_0 *i.e.* $z(t) \geq z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0)$; selon le signe de $z'(t_0)$, $z(t)$ tend donc vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Donc f n'est pas bornée.

Si f est une solution qui s'annule en deux points t_1 et t_2 (avec $t_1 < t_2$) alors $z = f^2$ aussi mais z est convexe positive donc $z(t) = 0$ sur $[t_1, t_2]$ et le théorème de Cauchy-Lipschtitz implique que $z(t) = 0$ pour tout t. Ainsi, une solution qui s'annule en deux points est identiquement nulle. □

Proposition. — *Si $q : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et si (L) admet une solution y nulle en a et b et > 0 sur $]a, b[$ alors $\displaystyle\int_a^b |q(t)|\, dt > \frac{4}{b-a}$.*

Démonstration. — Puisque y est continue sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $y(c)$ soit maximal. Comme $y(a) = y(b) = 0$ et $y(t) > 0$ sur $]a, b[$, on a $c \in]a, b[$. Pour tous $a < \alpha < \beta < b$, on a

$$\int_a^b |q(t)|\, dt = \int_a^b \left|\frac{y''(t)}{y(t)}\right| dt > \frac{1}{y(c)} \int_a^b \left|y''(t)\right| dt \geq \frac{1}{y(c)} \left|y'(\beta) - y'(\alpha)\right|.$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\alpha \in]a, c[$ et $\beta \in]c, b[$ tels que

$$\frac{y(c) - y(a)}{c - a} = y'(\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{y(b) - y(c)}{b - c} = y('\beta)$$

donc

$$\int_a^b |q(t)|\, dt > \frac{1}{y(c)} \left|\frac{y(b) - y(c)}{b - c} - \frac{y(c) - y(a)}{c - a}\right| = \frac{1}{b - c} + \frac{1}{c - a}.$$

Or la fonction $c \mapsto \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$ atteint son minimum pour $c = \frac{a+b}{2}$ et vaut alors $\frac{4}{b-a}$. □

Leçons concernées

20 Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives de solutions

21 Équations différentielles linéaires. Exemples

22 Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées

Référence

X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

Sébastien Pellerin

DÉVELOPPEMENT 8

ENVELOPPE CONVEXE DU GROUPE ORTHOGONAL

On considère l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\!|\ \|\!|_2$ induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Lemme. — *Les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les applications*

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, M \mapsto \mathrm{Tr}\ (AM) \quad \textit{où} \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Démonstration. — On considère le morphisme $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})', A \mapsto f_A$ où $f_A(M) = \mathrm{Tr}\ (AM)$. Il s'agit de montrer que f est un isomorphisme *i.e.* (puisque $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})'$) de montrer que f est injective. Si $A = (a_{i,j})$ est telle que $f_A = 0$ alors, pour tous $1 \le i, j \le n$, on a

$$0 = f_A(E_{i,j}) = \mathrm{Tr}\ (AE_{i,j})$$

mais

$$AE_{i,j} = \sum_{1\le k,l\le n} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j} = \sum_{1\le k,l\le n} a_{k,l}\delta_{li}E_{k,l}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,i}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}$$

d'où

$$0 = \mathrm{Tr}\ (AE_{i,j}) = \mathrm{Tr}\ \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\mathrm{Tr}\ (E_{k,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\delta_{kj} = a_{j,i}$$

i.e. $A = 0$. □

Théorème. — *L'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité.*

Démonstration. — Il est clair que $\mathbb{B}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ contient l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$, on considère donc une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|\!|M\|\!|_2 \le 1$. D'après un corollaire du théorème de Hahn-Banach, pour montrer que M est dans l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$, il suffit de montrer que

$$\varphi(M) \le \sup_{O\in\mathcal{O}(n)} \varphi(O)$$

pour toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. D'après le lemme, cela revient à montrer que

$$\mathrm{Tr}\ (AM) \le \sup_{O\in\mathcal{O}(n)} \mathrm{Tr}\ (AO)\ ,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

On considère une décomposition polaire $A = \Omega S$ de A (*i.e.* Ω est orthogonale et S est symétrique positive) et une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de S, alors

$$\sup_{O\in\mathcal{O}(n)} \mathrm{Tr}\ (AO) \ge \mathrm{Tr}\ (A\Omega^{-1}) = \mathrm{Tr}\ (\Omega^{-1}A) = \mathrm{Tr}\ (S) = \sum_{i=1}^{n} \|Se_i\|_2\,.$$

D'autre part, on a

$$\mathrm{Tr}\ (AM) = \mathrm{Tr}\ (MA) = \sum_{i=1}^{n}\langle MAe_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle Ae_i, M^*e_i\rangle$$

d'où d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mathrm{Tr}\ (AM) \leq \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|_2 \, \|M^* e_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|_2 \, |||M^*|||_2 \, \|e_i\|_2 \, .$$

Mais $|||M|||_2 \leq 1$ implique que $|||M^*|||_2 \leq 1$ et la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormale donc

$$\mathrm{Tr}\ (AM) \leq \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|\Omega S e_i\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \|Se_i\|_2$$

et on a finalement bien $\mathrm{Tr}\ (AM) \leq \sup_{O \in \mathcal{O}(n)} \mathrm{Tr}\ (AO)$. □

On rappelle qu'un élément U de $\mathbb{B}$ est dit *extremal* si toute écriture du type $U = \frac{1}{2}(V + W)$ avec $V, W \in \mathbb{B}$ implique $U = V = W$.

Théorème. — $\mathcal{O}(n)$ *est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité.*

Démonstration. — Notons tout d'abord que si $|||U||| < 1$ alors U n'est pas extrémal ; en effet, si $U = 0$ alors $U = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + (-\mathrm{I}))$ et si $U \neq 0$ alors $U = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|||U|||}U + (2 - \frac{1}{|||U|||})U\right)$.

D'autre part, tout élément $U \in \mathcal{O}(n)$ est extrémal ; en effet, écrivons $U = \frac{1}{2}(V + W)$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $2Ux = Vx + Wx$ d'où

$$4\,\|x\|^2 = \|2Ux\|^2 = \|Vx\|^2 + \|Wx\|^2 + 2\langle Vx, Wx\rangle \leq |||V|||^2\,\|x\|^2 + |||W|||^2\,\|x\|^2 + |||V|||\,|||W|||\,\|x\|^2 \leq 4\,\|x\|^2$$

ce qui implique que les inégalités ci-dessus sont en fait des égalités *i.e.* on a

$$\|Vx\| = \|x\| \ , \ \|Wx\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \langle Vx, Wx\rangle = \|Vx\|\,\|Wx\| \, ;$$

la dernière égalité implique que Vx et Wx sont positivement liés et le deux premières montrent donc qu'on a en fait $Vx = Wx$, d'où $U = V = W$.

Soit A un élément extrémal de la boule unité, on en considère une décomposition polaire $A = SO$, ce qui peut aussi s'écrire

$$A = {}^t\Omega D \Omega O \quad \text{où} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$$

et $\Omega, O \in \mathcal{O}(n)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$. D'autre part on a $|||A||| = |||D||| = \sup_{1 \leq i \leq n} d_i$ donc $0 \leq d_i \leq 1$ pour tout i. Supposons que l'un des d_i soit non nul, par exemple $d_1 \neq 0$, et posons

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 2d_1 - 1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

puis $V = {}^t\Omega D_1 \Omega O$ et $W = {}^t\Omega D_2 \Omega O$ alors $V \neq W$, $|||V||| = |||D_1||| \leq 1$, $|||W||| = |||D_2||| \leq 1$ et $A = \frac{1}{2}(U + W)$ ce qui contredit le caractère extrémal de A. Par conséquent, tous les d_i sont nuls *i.e.* $A = {}^t\Omega\Omega O = O \in \mathcal{O}(n)$. □

Leçon concernée

10 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.

Sébastien Pellerin

Compléments

Applications de la caractérisation du dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. —
On a vu que les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les applications

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, M \mapsto \mathrm{Tr}\ (AM) \quad \text{où} \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Proposition. — *Si f est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(MN) = f(NM)$ pour tous M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \mathrm{Tr}$.*

Démonstration. — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(M) = \mathrm{Tr}\ (AM)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; l'hypothèse s'écrit donc $\mathrm{Tr}\ (AMN) = \mathrm{Tr}\ (ANM)$, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *i.e.* $\mathrm{Tr}\ ((AM - MA)N) = 0$. Puisque, pour M fixée, la forme linéaire $N \mapsto \mathrm{Tr}\ ((AM - MA)N)$ est nulle, c'est donc que $AM = MA$. Ainsi, A commute avec toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ or le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est composé des homothéties donc $A = \lambda \mathrm{I}$ et il s'ensuit que $f = \lambda \mathrm{Tr}$. □

Remarque. — Le fait que le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit composé des homothéties peut se montrer de la façon suivante : $A = (a_{i,j})_{i,j}$ commute avec la matrice $E_{i,j}$ de la base canonique alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j} = \sum_{1 \le k,l \le n} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = AE_{i,j} = E_{i,j} A = \sum_{1 \le k,l \le n} a_{k,l} E_{i,j} E_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l} E_{i,l}$$

d'où $a_{k,i} = 0$ pour $k \neq i$ et $a_{i,i} = a_{j,j}$.

Remarque. — On peut donner une preuve directe de la proposition. Soit $1 \le i, j \le n$ avec $i \neq j$, on a

$$f(E_{i,j}) = f(E_{i,i}E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{i,i}) = f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j}).$$

Si on note λ la valeur commune des $f(E_{i,i})$, on vérifie que les formes linéaires f et $\lambda \mathrm{Tr}$ coïncident sur une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc sont égales.

Proposition. — *$GL_n(\mathbb{K})$ coupe tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Démonstration. — Un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le noyau d'une forme linéaire $M \mapsto \mathrm{Tr}\ (AM)$ donc il s'agit de trouver M inversible telle que $\mathrm{Tr}\ (AM) = 0$. Notons r le rang de A alors il existe P, Q inversibles telles que

$$PAQ = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =: J_r$$

or $\mathrm{Tr}\ (AM) = \mathrm{Tr}\ (P^{-1}J_rQ^{-1}M) = \mathrm{Tr}\ (J_rQ^{-1}MP^{-1})$ *i.e.* il s'agit de trouver N inversible telle que $\mathrm{Tr}\ (J_rN) = 0$ (on pose alors $M = QNP$). On considère la matrice de permutation

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ I_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

qui est bien inversible et telle que J_rN soit de diagonale nulle. □

Proposition. — *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a équivalence entre*

(*i*) *il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AM + MA = B$*

(*ii*) *pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC + CA = 0$, on a $\mathrm{Tr}\ (BC) = 0$*

Démonstration. — $(i) \Rightarrow (ii)$ Si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $AC + CA = 0$ alors

$$\mathrm{Tr}\ (BC) = \mathrm{Tr}\ ((AM + MA)C) = \mathrm{Tr}\ (AMC) + \mathrm{Tr}\ (MAC) = \mathrm{Tr}\ (CAM) + \mathrm{Tr}\ (ACM)$$

i.e. $\mathrm{Tr}\ (BC) = \mathrm{Tr}\ ((CA + AC)M) = 0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ On considère l'endomorphisme $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M \mapsto AM + MA$, il s'agit de montrer que $B \in \mathrm{Im}\ f$. L'application $T : C \mapsto T_C$, où $T_C(M) = \mathrm{Tr}\ (CM)$, définit un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual et la condition (ii) signifie que $T_C(B) = 0$ dès que $C \in \ker f$ *i.e.*

$$B \in (T(\ker f))^\circ = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ ;\ \forall \varphi \in T(\ker f), \varphi(N) = 0\}.$$

Mais la première implication donne $\mathrm{Im}\ f \subset (T(\ker f))^\circ$ or (puisque T est un isomorphisme)

$$\dim (T(\ker f))^\circ = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) - \dim T(\ker f) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) - \dim \ker f = \dim \mathrm{Im}\ f$$

d'où $B \in \mathrm{Im}\ f$. □

Preuve du théorème de Hahn-Banach et de ses corollaires. —

Théorème de Hahn-Banach. — *Soit E un espace vectoriel normé, M un sous-espace de E et A un ouvert convexe non vide de E tel que $M \cap A = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan linéaire fermé H de E tel que $M \subset H$ et $H \cap A = \emptyset$.*

Démonstration. — Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-espaces N de E qui contiennent M et n'intersectent pas A, on ordonne $\mathcal{F}$ par inclusion de sorte que ce soit un ensemble inductif, alors le lemme de Zorn donne un élément maximal H ; on pose alors

$$\Omega = H + \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A = \bigcup_{h \in H} \left(h + \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A \right)$$

qui est un ouvert de E.

• On a $\Omega \cap (-\Omega) = \emptyset$. En effet, sinon il existe $x = h_1 + \lambda_1 a_1 = h_2 - \lambda_2 a_2$ avec $h_1, h_2 \in H$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $a_1, a_2 \in A$; on peut alors écrire

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} a_2 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}(h_1 - h_2) \in H$$

alors que cet élément appartient à A par convexité, c'est impossible puisque $H \cap A = \emptyset$.

• On a $E = H \cup \Omega \cup (-\Omega)$. En effet, sinon on considère $x \in E \setminus (H \cup \Omega \cup (-\Omega))$ puis on pose $\widetilde{H} = H \oplus \mathbb{R}x$ alors $H \subsetneqq \widetilde{H}$ donc, par maximalité de H, on doit avoir $\widetilde{H} \cap A \neq \emptyset$ *i.e.* il existe $x \in H$ et $\lambda \neq 0$ tels que $y = h + \lambda x \in \widetilde{H} \cap A$. Mais comme $y \in A$, on a

$$x = -\frac{1}{\lambda} h + \frac{1}{\lambda} y \in \Omega \cup (-\Omega)$$

ce qui contredit le choix de x.

• On a $H \cap (\Omega \cup (-\Omega)) = \emptyset$. En effet, puisque H coupe Ω si et seulement si H coupe $(-\Omega)$, il suffit de montrer que $H \cap \Omega = \emptyset$, on suppose donc qu'il existe $x = h + \lambda a$ dans H où $h \in H$, $\lambda > 0$ et $a \in A$, alors $a = \frac{1}{\lambda}(x - h) \in A \cap H$ ce qui est impossible.

• Puisque Ω est ouvert et $H = E \setminus (\Omega \cup (-\Omega))$, H est fermé dans E.

• Enfin, H est un hyperplan linéaire. En effet, considérons un élément x non nul dans $\Omega \setminus H$ et posons $\widetilde{H} = H \oplus \mathbb{R}x$. Si $\widetilde{H} \neq E$ alors il existe $y \in (-\Omega)$ tel que $y \notin \widetilde{H}$ (on peut prendre y dans $(-\Omega)$ puisque $(-\Omega) \subset \widetilde{H}$ implique $\Omega \subset \widetilde{H}$) et on considère alors l'application

$$f : [0,1] \to E, t \mapsto tx + (1-t)y.$$

On a $0 \in f^{-1}(-\Omega)$ et $1 \in f^{-1}(\Omega)$ or $f^{-1}(-\Omega)$ et $f^{-1}(\Omega)$ sont deux ouverts non vides du connexe $[0,1]$ qui sont disjoints puisque $\Omega \cap (-\Omega) = \emptyset$, il s'ensuit que $f^{-1}(-\Omega) \cup f^{-1}(-\Omega) \subsetneqq [0,1]$. Ainsi, il existe $t \in]0,1[$ tel que $f(t) \in H$ *i.e.*

$$y = \frac{1}{1-t}(f(t) - tx) \in H \oplus \mathbb{R}x = \widetilde{H}$$

ce qui est impossible par choix de y. On a donc $H \oplus \mathbb{R}x = \widetilde{H} = E$ *i.e.* H est un hyperplan. $\square$

Corollaire. — *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, F un convexe fermé de E et C un convexe compact de E tels que $F \cap C = \emptyset$. Alors il existe une forme linéaire continue φ telle que :*

$$\sup_{x \in C} \varphi(x) < \inf_{y \in F} \varphi(y).$$

Démonstration. — On pose $G = F - C$, alors G est fermé et ne contient pas 0. En effet, $0 \notin G$ puisque $F \cap C = \emptyset$ et considérons deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ respectivement dans F et C telles que la suite $(z_n)_n$, où $z_n = x_n - y_n$, converge vers $z \in E$. Puisque C est compact, il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(y_{\psi(n)})_n$ converge vers $y \in C$. Notons $x = y + z$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} x_{\psi(n)} = \lim_{n \to +\infty} \left(y_{\psi(n)} + z_{\psi(n)}\right) = y + z = x.$$

Or F est fermé donc $x \in F$ i.e. $z = x - y \in F - C = G$. En particulier, il existe $r > 0$ tel que $\mathbb{B}(0,r) \cap G = \emptyset$.

On pose $A = G + \mathbb{B}(0,r) = G - \mathbb{B}(0,r)$, alors $0 \notin A$ et il existe une forme linéaire continue $\varphi : E \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(z) > 0$ pour tout $z \in A$. En effet, on a $0 \notin A$ et puisque A est un ouvert convexe, on pose $M = \{0\}$ et on applique le théorème de Hahn-Banach géométrique donc il existe un hyperplan fermé H tel que $H \cap A = \emptyset$. En écrivant $H = \ker \varphi$ avec $\varphi : E \to \mathbb{R}$ linéaire, on voit que φ est continue. Comme $\ker \varphi \cap A = \emptyset$, on a $0 \notin \varphi(A)$ avec $\varphi(A)$ convexe dans $\mathbb{R}$ donc $\varphi(A)$ est un intervalle et on a donc soit $\varphi(A) \subset]0, +\infty[$, soit $\varphi(A) \subset]-\infty, 0[$; quitte à prendre $-\varphi$ au lieu de φ, on a bien $\varphi(z) > 0$ pour tout $z \in A$.

On a alors $m = \inf_{x \in G} \varphi(x) > 0$. En effet, supposons que $m = 0$, alors il existe une suite $(x_n)_n$ dans G telle que la suite $(\varphi(x_n))_n$ tende vers 0. Puisque φ est non nulle, il existe $u \in \mathbb{B}(0,r)$ tel que $\varphi(u) \neq 0$. On pose

$$v = -\frac{|\varphi(u)|}{\varphi(u)} \cdot u\ ,$$

alors on a $\|v\| = \|u\|$ donc $v \in \mathbb{B}(0,r)$. Comme $x_n + v \in G + \mathbb{B}(0,r) = A$, on a

$$0 < \varphi(x_n + v) = \varphi(x_n) + \varphi(v) = \varphi(x_n) - |\varphi(u)|$$

d'où

$$0 < |\varphi(u)| < \varphi(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

ce qui est impossible. On a donc bien $m > 0$.

Considérons maintenant $x \in C$ et $y \in F$, alors $y - x \in G$ d'où $\varphi(y) - \varphi(x) \geq m$ donc

$$\forall y \in F,\ \sup_{x \in C} \varphi(x) < \sup_{x \in C} (m + \varphi(x)) \leq m + \varphi(y)$$

d'où

$$\sup_{x \in C} \varphi(x) \leq m \inf_{y \in F} \varphi(y) < \inf_{y \in F} \varphi(y).$$

$\square$

Corollaire. — *Soit E un espace vectoriel normé et A une partie compacte de E. Alors $x \in E$ est adhérent à l'enveloppe convexe de A si et seulement si pour tout $\varphi \in E'$, on a*

$$\varphi(x) \leq \sup_{y \in A} \varphi(y).$$

Démonstration. — On pose $F=\{x\}$ et on note C l'adhérence de l'enveloppe convexe de A, alors F est un convexe fermé et C est un convexe compact (d'après le théorème de Caratheodory). Si $x\notin F$ alors $C\cap F=\emptyset$ avec C convexe compact et F convexe fermé donc le corollaire précédent donne une forme linéaire φ telle que

$$\sup_{y\in C}\varphi(y)<\inf_{y\in F}\varphi(y)\quad i.e.\quad \sup_{y\in C}\varphi(y)<\varphi(x).$$

Réciproquement, si $x\in C$ alors il existe $(x_n)_n$ dans l'enveloppe convexe de A tendant vers x, on a donc $\varphi(x_n)\leq\sup_{y\in C}\varphi(y)$ pour tout $\varphi\in E'$ et tout n, d'où $\varphi(x)\leq\sup_{y\in C}\varphi(y)$ par continuité de φ. □

Une caractérisation géométrique de $\mathcal{SO}(n)$ dans $SL_n(\mathbb{R})$. —

Proposition. — *On a $d_2(0,SL_n(\mathbb{R}))=\inf_{M\in SL_n(\mathbb{R})}\|M\|_2=\sqrt{n}$ et le lieu de $SL_n(\mathbb{R})$ où cette distance est atteinte est exactement $\mathcal{SO}(n)$.*

Démonstration. — On considère les applications f et q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définies pour $M=(m_{i,j})$ par

$$f(M)=\det M-1\quad\text{et}\quad q(M)=\|M\|_2^2=\sum_{1\leq i,j\leq n}m_{i,j}^2=\mathrm{Tr}\ ({}^tMM).$$

Il s'agit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ puisque ce sont des fonctions polynômiales en les n^2 variables réelles $m_{i,j}$. De plus, on a $\frac{\partial q}{\partial m_{i,j}}(M)=2m_{i,j}$ pour tous i,j, *i.e.* $\nabla q(M)=2M$. Si $M_{i,j}$ désigne le cofacteur de $m_{i,j}$ alors $\det M=\sum_{j=1}^n m_{i,j}M_{i,j}$ mais $M_{i,j}$ ne dépend pas de la variable $m_{i,j}$ d'où $\frac{\partial f}{\partial m_{i,j}}(M)=M_{i,j}$ donc $\nabla f(M)$ est la comatrice $Com(M)$ de M. On souhaite minimiser l'expression $q(M)$ sous la contrainte $f(M)=0$ (ce minimum existe bien puisque $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) ; on rappelle le théorème des extrema liés :

Lemme. — *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $u,v:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\mathcal{V}=\{x\in\mathcal{U};v(x)=0\}\neq\emptyset$, $u_{|\mathcal{V}}$ a un extremum local en $a\in\mathcal{V}$ et $\nabla v(a)\neq 0$. Alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\nabla u(a)=\lambda\nabla v(a)$.*

Si $\inf_{M\in SL_n(\mathbb{R})}\|M\|_2$ est atteint en $A\in SL_n(\mathbb{R})$ alors il existe un réel μ tel que $A=\mu Com(A)$ or $\det A=\det Com(A)=1$ d'où $\mu=1$. Or $A^{-1}={}^tCom(A)$ donc ${}^tAA=\mathrm{I}$ *i.e.* $A\in\mathcal{O}(n)$ d'où $A\in\mathcal{SO}(n)$. Réciproquement, si $A\in\mathcal{SO}(n)$ alors on a $q(A)=n$. □

Distance au groupe orthogonal. —

Proposition. — *Pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $d(M,\mathcal{O}(n))=\|\!|\sqrt{{}^tMM}-\mathrm{I}|\!\|_2$.*

Démonstration. — Notons tout d'abord que si S et T sont symétriques positives et si $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\langle S,T\rangle\geq 0$. Par densité, il suffit de vérifie cela pour T symétrique définie positive ; on note $\sqrt{T}$ l'unique racine carré de T alors $R=\sqrt{T}S\sqrt{T}$ est symétrique positive et on a $\langle S,T\rangle=\mathrm{Tr}\ (ST)=\mathrm{Tr}\ (\sqrt{T}ST\sqrt{T}^{-1})=\mathrm{Tr}\ (R)\geq 0$.

On considère l'action de $\mathcal{O}(n)\times\mathcal{O}(n)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $(\Omega_1,\Omega_2)\star M=\Omega_1M\Omega_2^{-1}$ alors on a $\|(\Omega_1,\Omega_2)\star M\|_2=\|M\|_2$ donc tous les points d'une même orbite sont à la même distance de $\mathcal{O}(n)$. Soit $M=SO$ une décomposition polaire de M, alors il existe $\Omega\in\mathcal{O}(n)$ telle que $S={}^t\Omega D\Omega$ avec D diagonale à coefficients positifs ; il s'ensuit que D est dans l'orbite de M or on a

$$\|D-\mathrm{I}\|_2=\left\|{}^t\Omega(D-\mathrm{I})\Omega\right\|_2=\left\|{}^t\Omega D\Omega-\mathrm{I}\right\|_2=\|S-\mathrm{I}\|_2=\left\|\sqrt{M{}^tM}-\mathrm{I}\right\|_2$$

donc il reste à montrer que $\|D-\mathrm{I}\|_2$ est la distance de D à $\mathcal{O}(n)$.

Soit $U\in\mathcal{O}(n)$ et $\delta:=\|D-U\|_2^2-\|D-\mathrm{I}\|_2^2$, montrons que $\delta\geq 0$. En développant, on obtient

$$\delta=2\langle\mathrm{I}-U,D\rangle=2\langle\mathrm{I}-E,D\rangle\quad\text{où}\quad E=\frac{1}{2}(U+{}^tU).$$

Si $|||\ |||_2$ est la norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par la norme $\|\ \|_2$ de $\mathbb{R}^n$ alors $|||U|||_2 = 1$ donc $|||E|||_2 \leq 1$ et il s'ensuit que la matrice symétrique $I - E$ est positive puisque

$$\langle (\mathrm{I} - E)X, X\rangle = \|X\|_2^2 - \langle EX, X\rangle \geq \|X\|_2^2\,(1 - |||E|||_2) \geq 0.$$

D'après la remarque préliminaire, on a donc $\delta = 2\langle \mathrm{I} - E, D\rangle \geq 0$. $\square$

Références

M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre 1*, Cassini, 2001.

H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

DÉVELOPPEMENT 9

ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES ET SÉRIES GÉNÉRATRICES

Exemple. — Le nombre de solutions $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ de l'équation $x + 2y + 3z = n$ est
$$p(n) = \frac{(n+1)(n+5)}{12} + \frac{17}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2}{9}\cos\frac{2i\pi}{3}.$$

Démonstration. — Pour $|t| < 1$, on effectue les développements en série entière suivants :
$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \ , \ \frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-t^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{3k}$$
de sorte que
$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^{3k}\right) = \sum_{d\geq 0}\left(\sum_{\substack{n+2m+3p=d\\ n,m,p\geq 0}} t^d\right) = \sum_{d\geq 0} p(d)t^d.$$
On décompose cette fraction en éléments simples
$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} = \frac{1}{6(1-t)^3} + \frac{1}{4(1-t)^2} + \frac{17}{72(1-t)} + \frac{1}{8(1+t)} + \frac{1}{9(1-jt)} + \frac{1}{9(1-j^2t)}.$$
En dérivant la série géométrique, il vient
$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)t^k \quad \text{et} \quad \frac{1}{(1-t)^3} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2}(k+2)(k+1)t^k$$
d'où en remplaçant plus haut
$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{12}(k+2)(k+1) + \frac{1}{4}(k+1) + \frac{17}{72} + \frac{(-1)^k}{8} + \frac{1}{9}(e^{\frac{2i\pi k}{3}} + e^{-\frac{2i\pi k}{3}})\right)t^k.$$
et on a donc, pour tout $k \geq 0$, $p(k) = \dfrac{(k+1)(k+5)}{12} + \dfrac{17}{72} + \dfrac{(-1)^k}{8} + \dfrac{2}{9}\cos\dfrac{2i\pi}{3}$. $\square$

On considère des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ premiers dans leur ensemble et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n le nombre de solutions $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation
$$\alpha_1 n_1 + \cdots + \alpha_p n_p = n.$$

Proposition. — $S_n \sim \dfrac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_p}\dfrac{n^{p-1}}{(p-1)!}$

Démonstration. — On a

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n = \prod_{\ell=1}^{p} \sum_{n_\ell \in \mathbb{N}} z^{\alpha_\ell n_\ell} = \prod_{\ell=1}^{p} \frac{1}{1 - z^{\alpha_\ell}}$$

et toutes ces séries entières admettent 1 pour rayon de convergence. La fraction rationnelle $F(z)$ a pour pôles les racines $\alpha_\ell^{\text{è}}$ de l'unité pour $\ell = 1, \ldots, p$. En outre, le pôle $z = 1$ est d'ordre p alors que tous les autres sont d'ordre $< p$ (puisque les α_i sont premiers dans leur ensemble). La décomposition en éléments simples de F s'écrit donc sous la forme

$$F(z) = \frac{A}{(1-z)^p} + G(z)$$

où $G(z)$ est une somme finie de termes du type $\dfrac{a_{1,\omega}}{\omega - z} + \cdots \dfrac{a_{p-1,\omega}}{(\omega - z)^{p-1}}$ avec les ω racines de l'unité et les $a_{k,\omega} \in \mathbb{C}$. Pour trouver A, on écrit

$$(1-z)^p F(z) = \frac{1}{1 + z + \cdots + z^{\alpha_1 - 1}} \cdots \frac{1}{1 + z + \cdots + z^{\alpha_p - 1}}$$

puis on fait tendre z vers 1 d'où $A = \dfrac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_p}$. Par ailleurs en dérivant k fois, il vient

$$\frac{1}{(\omega - z)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(s+k-1)!}{s!} \omega^{-s-k} z^s$$

et (puisque $|\omega| = 1$) le coefficient en z^n dans cette série est un $O(s^{k-1})$. D'autre part, on a

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(s+k-1)!}{s!} z^s = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{s=0}^{+\infty} (s+1) \cdots (s+p-1) z^s$$

d'où

$$S_n = \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \frac{(n+1) \cdots (n+p-1)}{(p-1)!} + O(n^{p-2})$$

d'où

$$S_n \sim \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}.$$

□

Leçon concernée

24a Comportement asymptotique des suites numériques. Exemples

Références

A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Analyse 1*, Masson, 1997.

X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

Sébastien Pellerin

DÉVELOPPEMENT 10

SUITES ÉQUIRÉPARTIES

On dit qu'une suite $(x_n)_n$ de $[0,1[$ est *équirépartie* si, pour tous $0 \leq a < b < 1$, on a
$$\frac{1}{n}N(a,b,n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b-a$$
où $N(a,b,n) = \operatorname{card}\{m \leq n \,;\, a \leq x_m \leq b\}$.

Proposition. — *Soit $(x_n)_n$ une suite de $[0,1[$ alors on a équivalence entre :*

(i) $(x_n)_n$ est équirépartie modulo 1

(ii) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ *pour toute fonction 1-périodique continue f,*

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{2i\pi m x_k} = o(n)$ *pour tout $m \in \mathbb{Z}$ non nul*

Démonstration. — On pose $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Considérons tout d'abord une fonction en escalier η sur $[0,1[$ *i.e.* il existe une partition $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = 1$ et $c_1,\ldots,c_m \in \mathbb{R}$ tels que $\eta(x) = c_j$ pour $a_{j-1} < x < a_j$, alors
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta(x_k) = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{m} c_j N(a_{j-1},a_j,n) - \sum_{j=0}^{m}\eta(a_j)N(a_j,a_j,n)\right].$$
La suite $(x_n)_n$ est équirépartie donc $\frac{1}{n}N(a_{j-1},a_j,n)$ tend vers $a_j - a_{j-1}$ d'où
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta(x_k) &= \sum_{j=1}^{m} c_j(a_j - a_{j-1}) - \sum_{j=0}^{m}\eta(a_j)\left[\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}N(a_j,a_j,n)\right]\\ &= \int_0^1 \eta(x)dx - \sum_{j=0}^{m}\eta(a_j)\left[\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}N(a_j,a_j,n)\right].\end{aligned}$$
Mais pour tout $a \in [0,1[$ et tout $\varepsilon > 0$, on a
$$0 \leq \frac{1}{n}N(a,a,n) \leq \frac{1}{n}N(a,a+\varepsilon,n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varepsilon$$
donc $N(a,a,n) = o(n)$ et il s'ensuit que
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta(x_k) = \int_0^1 \eta(x)dx.$$
Considérons maintenant une fonction f Riemann-intégrable. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe φ et ψ en escalier sur $[0,1[$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\int_0^1(\psi(x)-\varphi(x))dx \leq \varepsilon$ donc $S_n(\varphi) \leq S_n(f) \leq S_n(\psi)$, $\left|\int_0^1 f - \int_0^1 \varphi\right| < \varepsilon$ et $\left|\int_0^1 f - \int_0^1 \psi\right| < \varepsilon$ or $S_n(\varphi)$ et $S_n(\psi)$ tendent respectivement vers $\int_0^1 \varphi(x)dx$ et $\int_0^1 \psi(x)dx$ donc $S_n(f)$ tend bien vers $\int_0^1 f(x)dx$ quand n tend vers l'infini.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ Fixons $x \in [0,1[$ et considérons la fonction φ valant 0 sur $[0,x[$ et 1 sur $[x,1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$ (et tel que $x+\varepsilon < 1$), on considère la fonction $t \mapsto \varphi_\varepsilon(t)$ valant 0 sur $[0,x[$, $\frac{t-x}{\varepsilon}$ sur $[x,x+\varepsilon[$ et 1 sur $[x+\varepsilon,1]$: il s'agit d'une fonction continue donc $S_n(\varphi_\varepsilon)$ tend vers

$$\int_0^1 \varphi_\varepsilon(t)dt = \int_x^{x+\varepsilon} \frac{t-x}{\varepsilon}dt + \int_{x+\varepsilon}^1 dt = \int_0^\varepsilon \frac{u}{\varepsilon}du + \int_{x+\varepsilon}^1 dt = \frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon} + 1 - (x+\varepsilon) = 1 - x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or $\varphi_\varepsilon \leq \varphi$ donc $S_n(\varphi_\varepsilon) \leq S_n(\varphi)$ pour tout entier n, il s'ensuit que $\liminf\limits_{n\to+\infty} S_n(\varphi) \geq 1-x$.
De même, pour tout $\varepsilon > 0$, on considère la fonction $t \mapsto \psi_\varepsilon(t)$ valant 0 sur $[0,x-\varepsilon[$, $\frac{t-x+\varepsilon}{\varepsilon}$ sur $[x-\varepsilon,x[$ et 1 sur $[x,1]$: il s'agit d'une fonction continue donc $S_n(\psi_\varepsilon)$ tend vers

$$\int_0^1 \psi_\varepsilon(t)dt = \int_{x-\varepsilon}^x \frac{t-x+\varepsilon}{\varepsilon}dt + \int_x^1 dt = \int_0^\varepsilon \frac{u}{\varepsilon}du + \int_x^1 dt = \frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon} + 1 - x = 1 - x + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or $\psi_\varepsilon \geq \varphi$ donc $S_n(\psi_\varepsilon) \geq S_n(\varphi)$ pour tout entier n, il s'ensuit que $\limsup\limits_{n\to+\infty} S_n(\varphi) \leq 1-x$.
Par conséquent on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(\varphi) = 1 - x = \int_0^1 \varphi(t)dt$$

et ce résultat s'applique pour $\chi_{[a,b[}$ car c'est une combinaison linéaire de fonctions du type φ.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ C'est clair puisque les $e_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto e^{2i\pi mx}$ sont continues.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (ii)}$ Pour tout $m \neq 0$, on a $\sum\limits_{k=0}^n e^{2i\pi m x_k} = o(n)$ *i.e.* $S_n(e_m) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^n e^{2i\pi m x_k}$ tend vers 0 donc $S_n(e_m)$ tend vers $\int_0^1 e_m(x)dx$. Pour $m = 0$, on a $S_n(e_0) = 1$ et $\int_0^1 e_0(x)dx = 1$. Par linéarité, $S_n(T)$ tend vers $\int_0^1 T(x)dx$ pour tout polynôme trigonométrique T.

Considérons f continue et $\varepsilon > 0$ alors, d'après le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme trigonométrique T tel que $\|T - f\|_\infty < \varepsilon$ d'où $|T(\{x_k\}) - f(\{x_k\})| < \varepsilon$ pour tout k, puis $|S_n(T) - S_n(f)| < \varepsilon$. On a donc pour tout entier n

$$\begin{aligned}\left|S_n(f) - \int_0^1 f(x)dx\right| &\leq |S_n(f) - S_n(T)| + \left|S_n(T) - \int_0^1 T(x)dx\right| + \int_0^1 |T(x) - f(x)|\,dx \\ &\leq 2\varepsilon + \left|S_n(T) - \int_0^1 T(x)dx\right|\end{aligned}$$

or $S_n(T)$ tend vers $\int_0^1 T(x)dx$ donc $S_n(f)$ tend vers $\int_0^1 f(x)dx$. $\square$

Leçons concernées

02 Exemples de parties denses et applications
09 Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités
23 Convergence des suites numériques. Exemples et applications
24a Comportement asymptotique des suites numériques. Exemples
24b Rapidité de convergence d'un suite. Exemples
32 Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables
36 Problèmes de convergence ou de divergence d'un intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Références

A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse 1*, Masson, 2è éd., 1997.

E. Leichtnam, *Exercices corrigés de mathématiques posés à l'oral des concours de Polytechnique et des E.N.S., Tome d'analyse*, Ellipses, 2000.

Sébastien Pellerin

DÉVELOPPEMENT 11

EXERCICES SUR LES SÉRIES

Proposition. — *Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} |f'(x)|\, dx$ converge. Alors la suite*
$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^{n+1} f(x)dx$$
converge donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ ont même nature.

Démonstration. — Si $v_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx$ alors $\alpha_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) - \sum\limits_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ d'où en intégrant par parties
$$v_k = f(k) - [(x-(k+1))f(x)]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} (x-(k+1))f(x)dx = \int_k^{k+1} (x-(k+1))f(x)dx$$
donc $|v_k| \leq \displaystyle\int_k^{k+1} |x-k-1| \left|f'(x)\right| dx \leq \int_k^{k+1} \left|f'(x)\right| dx$ *i.e.* la suite $(\alpha_n)_n$ converge. $\square$

Exemple. — La série $\displaystyle\sum \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n}$ converge.

En effet, posons $u_n = \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n}$ et $f(x) = \dfrac{e^{i\sqrt{x}}}{x}$ alors $f'(x) = O(x^{-3/2})$ donc $\int |f'|$ converge et on en déduit que la série $\sum u_n$ a la même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$. Or $\int_1^A \frac{e^{i\sqrt{x}}}{x}dx = 2\int_1^{\sqrt{A}} \frac{e^{iu}}{u}du$ pour tout $A > 1$ et cette intégrale converge quand $A \to +\infty$ d'après la règle d'Abel ; sinon, on peut aussi écrire
$$\int_1^{\sqrt{A}} \frac{e^{iu}}{u}du = \left[\frac{e^{iu}}{iu}\right]_1^{\sqrt{A}} + \int_1^{\sqrt{A}} \frac{e^{iu}}{u^2}du = \frac{e^{i\sqrt{A}}}{i\sqrt{A}} - \frac{e^i}{i} + \int_1^{\sqrt{A}} \frac{e^{iu}}{u^2}du$$
or $\left|\frac{e^{i\sqrt{A}}}{i\sqrt{A}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$ tend vers 0 quand $A \to +\infty$ et d'autre part $\frac{e^{iu}}{u^2} = O(\frac{1}{u^2})$ donc l'intégrale $\int_1^{\sqrt{A}} \frac{e^{iu}}{u^2}du$ converge quand $A \to +\infty$ et, finalement $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u}du$ converge bien.

Proposition (formule des trapèzes). — *Soit f de classe C^2 sur $[a, a+1]$, alors*
$$\int_a^{a+1} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(f(a) + f(a+1)\right) - \frac{1}{2}\int_a^{a+1} (t-a)(a+1-t)f''(t)dt$$

Application. — Il existe une constante $K > 0$ telle que $n! \sim Ke^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}$.

On a $\log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log(k)$ et d'après la proposition

$$\int_k^{k+1} \log(x)dx = \frac{1}{2}\left(\log(k) + \log(k+1)\right) + \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \frac{(x-k)(k+1-x)}{x^2}dx$$

d'où en sommant pour $1 \leq k \leq n-1$

$$\int_1^n \log(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \log(k) - \frac{1}{2}\log(n) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{(x-k)(k+1-x)}{x^2}dx$$

or

$$\int_1^n \log(x)dx = [x\log(x) - x]_1^n = n\log(n) - n + 1$$

donc

$$n\log(n) - n + 1 = \log(n!) - \frac{1}{2}\log(n) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{(x-k)(k+1-x)}{x^2}dx$$

i.e.

$$\log(n!) = (n+\frac{1}{2})\log(n) - n + 1 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{(x-k)(k+1-x)}{x^2}dx.$$

On pose $v_k = \int_k^{k+1} \frac{(x-k)(k+1-x)}{x^2}dx$ alors $|v_k| \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}dx$ donc la série de terme général v_k converge et on a

$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{1-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} v_k}.$$

Application. — Si $-1 < \mathrm{Re}\ s \leq 0$ alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^s} = \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{n^{-s}}{2} + c + o(1).$$

On applique la proposition à $f(t) = t^{-s}$ sur $[k, k+1]$ de sorte que

$$\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^s} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^s} + \frac{1}{(k+1)^s}\right) - \frac{1}{2}\int_k^{k+1}(t-k)(k+1-t)\frac{s(s+1)}{t^{s+2}}dt$$

d'où

$$\int_1^n\frac{dt}{t^s} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k^s} + \frac{1}{(k+1)^s}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}u_k$$

où $u_k = -\frac{s(s+1)}{2}\int_k^{k+1}\frac{(t-k)(k+1-t)}{t^{s+2}}dt$. Or $-1 < \mathrm{Re}\ s \leq 0$ et $\sum |u_k| < \infty$ donc

$$\int_1^n\frac{dt}{t^s} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^s} + \frac{n^{-s}}{2} - \frac{1}{2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty}u_k - \sum_{k=n}^{+\infty}u_k\right)$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^s} = \int_1^n\frac{dt}{t^s} - \frac{n^{-s}}{2} + c + \sum_{k=n}^{+\infty}u_k = \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{n^{-s}}{2} + c + o(1).$$

Leçons concernées

29 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples

30 Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numriques

DÉVELOPPEMENT 12

THÉORÈME DES EXTREMA LIÉS

Proposition. — *Soit $f, g_1, \dots, g_r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note*

$$\Gamma = \{x \in \mathcal{U} \ ; \ g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}.$$

Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum en $a \in \Gamma$ et si $dg_{1a}, \dots, dg_{ra}$ sont linéairement indépendantes, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que

$$df_a = \lambda_1 dg_{1a} + \ldots + \lambda_r dg_{ra}.$$

Démonstration. — On note $s = n - r$ et on identifie $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ *i.e.* on note les éléments de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r)$ et on pose $a = (\alpha, \beta)$. Notons que le résultat est trivial pour $r = n$, on suppose donc désormais $r \leq n - 1$. Le fait que $dg_{1a}, \dots, dg_{ra}$ soient linéairement indépendantes signifie que la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{bmatrix}$$

est de rang r *i.e.* (quitte à changer le nom des variables) la sous-matrice $\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est inversible. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}'$ de α dans $\mathbb{R}^s$, un voisinage ouvert Ω de $a = (\alpha, \beta)$ dans $\mathbb{R}^n$ et une application $\varphi : \mathcal{U}' \to \mathbb{R}^r$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que (en notant $g = (g_1, \dots, g_r)$)

$$\big(g(x, y) = 0 \ , \ x \in \mathcal{U}' \ , \ (x, y) \in \Omega\big) \iff y = \varphi(x)$$

i.e. , sur un voisinage de a, les éléments de $\Gamma = \{z; g(z) = 0\}$ s'écrivent $(x, \varphi(x))$. On pose $\psi(x) = (x, \varphi(x))$ et $h(x) = f(\psi(x))$ alors (puisque $\psi(\alpha) = a$ et $\psi(x) \in \Gamma$) h admet un extremum local en α ; il s'ensuit que les dérivées partielles de h en α sont toutes nulles d'où (en notant $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r)$)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) = 0$$

et pour tout k

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) = 0$$

donc dans la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{bmatrix}$$

les s premières colonnes s'expriment comme combinaison linéaire des r dernières donc cette matrice est de rang au plus r. Il s'ensuit que les $r + 1$ lignes sont liées *i.e.* il existe $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mu_0 df_a + \mu_1 dg_{1a} + \ldots + \mu_r dg_{ra} = 0$$

mais $\mu_0 \neq 0$ puisque $dg_{1a}, \dots, dg_{ra}$ sont linéairement indépendantes, il suffit donc de poser $\lambda_i = \frac{\mu_i}{\mu_0}$. $\square$

Application. — $\mathcal{SO}(n)$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme $\| \ \|_2$ minimale.

Démonstration. — La norme est donnée par $\|M\|_2^2 = \text{Tr}\ (\ {}^tMM) = \sum_{i,j=1}^n m_{i,j}^2$ donc il s'agit de minimiser $q(M) = \text{Tr}\ (\ {}^tMM)$ sous la contrainte $f(M) = \det M - 1$. L'application q est une forme quadratique donc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tous i, j, on a $\frac{\partial q}{\partial m_{i,j}}(M) = 2m_{i,j}$ *i.e.* $\nabla q = 2M$. L'application f est polynômiale en n^2 variables donc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout i, on a en développant selon la ligne i

$$\det M = \sum_{j=1}^n m_{i,j} M_{i,j}$$

où $M_{i,j}$ est le cofacteur d'indice (i, j) ; puisque $M_{i,j}$ ne dépend pas de la variable $m_{i,j}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial m_{i,j}}(M) = M_{i,j}$$

et il s'ensuit que $\nabla f = \text{Com}(M)$. Notons que $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathbb{R}^{n^2}$ donc q atteint un minimum en un élément $A \in SL_n(\mathbb{R})$ donc, d'après le théorème des extrema liés, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla q(A) = \mu \nabla f(A)$ *i.e.* $2A = \mu\text{Com}(A)$. Comme $\det A = 1$, on a $A^{-1} = \ {}^t\text{Com}(A)$ d'où $2\ {}^tAA = \mu \text{I}_n$ et $2^n = \mu^n$. De plus, ${}^tAA$ est symétrique définie positive donc $\det(\ {}^tAA) > 0$ *i.e.* $\mu > 0$. Il vient donc $\mu = 2$ et ${}^tAA = \text{I}_n$ *i.e.* $A \in \mathcal{SO}(n)$. Notons enfin que $\|A\|_2^2 = \text{Tr}\ (\ {}^tAA) = n$. □

Leçons concernées

14 Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites

19 Problèmes d'extremums

Références

M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

Sébastien Pellerin

DÉVELOPPEMENT 13

THÉORÈME DE FEJER

Théorème. — *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue 2π-périodique, on pose $S_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$. La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément en moyenne de Cesaro vers f sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. — On a $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)dt = 0$ pour tout entier k non nul et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_0(t)dt = 1$. On pose $T_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} e_k$ et $D_n = \frac{T_0+\cdots+T_n}{n+1}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(t)dt = 1$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_k(t)dt = 1.$$

D'autre part, on vérifie aisément que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et tout $n \geq 1$, on a

$$T_n(x) = e^{-inx}\frac{e^{(2n+1)ix}-1}{e^{ix}-1} = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

donc

$$D_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T_k(x) = \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\sum_{k=0}^{n}\sin(\frac{n+1}{2}x) = \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{\frac{k+1}{2}ix}\right)$$

or on a

$$\sum_{k=0}^{n} e^{\frac{k+1}{2}ix} = e^{\frac{ix}{2}}\frac{e^{(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} = e^{\frac{(n+1)ix}{2}}\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

d'où

$$D_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\frac{\sin^2(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2.$$

Si $0 < \alpha < \pi$ et $x \in [-\pi, \pi]$ vérifie $|x| > \alpha$ alors

$$|D_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)\sin^2(\frac{\alpha}{2})}$$

et il s'ensuit que D_n converge uniformément vers 0 sur $[-\pi,\pi]\setminus[-\alpha,\alpha]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)T_n(x-t)dt$$

donc

$$C_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt.$$

Puisque les fonctions que l'on intègre sont 2π-périodiques, on obtient en effectuant le changement de variables $u = x - t$

$$C_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)du.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction f est continue et 2π-périodique, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe $\alpha \in]0,\pi[$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on ait

$$|x-y| < \alpha \ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f(x) - C_n(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-u) - f(x))D_n(u)du\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-u) - f(x)|\, D_n(u)du$$

d'où, en notant M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$, on a

$$|f(x) - C_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha\leq|u|\leq\pi} 2MD_n(u)du + \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\varepsilon D_n(u)du \leq \frac{M}{\pi}\int_{\alpha\leq|u|\leq\pi} D_n(u)du + \varepsilon.$$

Or D_n converge uniformément vers 0 sur $[-\pi,\pi] \setminus [-\alpha,\alpha]$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N\ ,\ \int_{\alpha\leq|u|\leq\pi} D_n(u)du \leq \varepsilon$$

d'où

$$\forall n \geq N\ ,\ \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x) - C_n(x)| \leq \frac{M}{\pi}\varepsilon + \varepsilon$$

d'où le résultat. □

Leçons concernées

08 Utilisation de la continuité uniforme en analyse
39 Transformation de Fourier et produit de convolution
40 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples
46 Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications

Référence

X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

DÉVELOPPEMENT 14

MÉTHODE DE GAUSS ET POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Proposition. — *Soit $a < b$, $\omega :]a,b[\to \mathbb{R}$ une application continue strictement positive et $\ell \geq 0$. Il existe une unique famille de points $a < x_0 < \cdots < x_\ell < b$ et une unique famille de réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_\ell$ tels que la méthode d'intégration donnée par*

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dt \simeq \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j f(x_j)$$

soit d'ordre $2\ell+1$. De plus l'erreur est donnée par

$$E(f) = \frac{\left|f^{2\ell+2}(\xi)\right|}{(2\ell+2)!} \int_a^b (\pi_{\ell+1}(x))^2 \omega(x)dx$$

où $\xi \in]a,b[$ et $\pi_{\ell+1}$ est le $(\ell+1)$-è polynôme orthogonal associé au poids ω.

Démonstration. — On commence par montrer l'unicité. Supposons qu'il existe de tels x_j et λ_j, on pose

$$\pi_{\ell+1}(t) = (t-x_0)\cdots(t-x_n).$$

Soit P un polynôme de degré au plus ℓ alors $\deg P\pi_{\ell+1} \leq 2\ell+1$ donc

$$\int_a^b P(t)\pi_{\ell+1}(t)\omega(t)dt = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j P(x_j)\pi_{\ell+1}(x_j) = 0$$

i.e. $\pi_{\ell+1}$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{\ell+1}[X]$ or $\pi_{\ell+1}$ est unitaire donc il s'agit du $(\ell+1)$-è polynôme orthogonal associé au poids ω et les x_j sont donc parfaitement déterminés comme étant ses racines. Notons L_i un polynôme (par exemple de Lagrange) tel que $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ alors

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j L_i(x_j) = \int_a^b L_i(x)\omega(x)dx$$

et les λ_i sont aussi uniques.

Montrons maintenant l'existence. On note $x_0, \ldots, x_\ell$ les $\ell+1$ racines (distinctes) de $\pi_{\ell+1}$ dans $]a,b[$, $L_0, \ldots, L_n$ des polynômes définis par $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ et on pose $\lambda_i = \int_a^b L_i(x)\omega(x)dx$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ alors le polynôme d'interpolation de Lagrange de f est $P_\ell(x) = \sum\limits_{j=0}^{\ell} f(x_j)L_j(x)$ d'où

$$\int_a^b P_\ell(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{\ell} f(x_j) \int_a^b L_j(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j f(x_j).$$

L'égalité précédente montre que la méthode est exacte si $f \in \mathbb{R}_\ell[X]$ puisque, dans ce cas, on a $f = P_\ell$. Si $f \in \mathbb{R}_{2\ell+1}[X]$ alors la division euclidienne de f par $\pi_{\ell+1}$ donne $f(x) = q(x)\pi_{\ell+1}(x) + r(x)$ avec $\deg q \leq \ell$ et $\deg r < \ell+1$ d'où

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \int_a^b q(x)\pi_{\ell+1}(x)\omega(x)dx + \int_a^b r(x)\omega(x)dx.$$

Mais $\pi_{\ell+1}$ est orthogonal à $\mathbb{R}_\ell[X]$ donc $\displaystyle\int_a^b q(x)\pi_{\ell+1}(x)\omega(x)dx = 0$ et la méthode est exacte pour r puisque $\deg r \leq \ell$ d'où

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j r(x_j).$$

Comme $f(x_j) = r_j$ pour tout j, il vient

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j f(x_j)$$

et la méthode est donc exacte pour les polynômes de degré au plus $2\ell+1$.

Soit $H_f \in \mathbb{R}_{2\ell+1}[X]$ un polynôme vérifiant $H_f(x_i) = f(x_i)$ et $H_f'(x_i) = f'(x_i)$. On fixe x dans $]a,b[$ distinct des x_i et on pose $\varphi(t) = f(t) - H_f(t) - k_x(\pi_{\ell+1}(x))^2$ où k_x est une constante fixée de sorte que $\varphi(x) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c_x \in]a,b[$ tel que $\varphi^{2\ell+2}(c_x) = 0$ d'où $k_x = \dfrac{f^{2\ell+2}(c_x)}{(2\ell+2)!}$ puis

$$f(x) - H_f(x) = \frac{f^{2\ell+2}(c_x)}{(2\ell+2)!}(\pi_{\ell+1}(x))^2.$$

Puisque H_f est un polynôme de degré $2\ell+1$, la méthode est exacte pour H_f, on a donc

$$\int_a^b H_f(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j H_f(x_j) = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j H_f(x_j)$$

d'où

$$E(f) = \left| \int_a^b f(x)\omega(x)dx - \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j H_f(x_j) \right| = \frac{\left|f^{2\ell+2}(c_x)\right|}{(2\ell+2)!} \int_a^b (\pi_{\ell+1}(x))^2\omega(x)dx.$$

En particulier, on a

$$E(x \mapsto x^{2\ell+2}) = \int_a^b (\pi_{\ell+1}(x))^2\omega(x)dx \neq 0$$

donc la méthode est d'ordre $2\ell+1$. Enfin, on a

$$E(f) \leq \int_a^b f(x)\omega(x)dx - \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j H_f(x_j) = \frac{\left\|f^{2\ell+2}\right\|_\infty}{(2\ell+2)!} \left\|\pi_{\ell+1}\right\|_2^2.$$

□

Leçons concernées

11 Utilisation de la dimension finie en analyse
24a Comportement asymptotiques des suites numériques. Exemples
24b Rapidité de convergence d'une suite. Exemples
32 Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables
37 Méthodes de calcul des valeurs approchées d'une intégrale
48 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales ou polynômiales par morceaux. Exemples

Références

J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 1996.
J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.

Sébastien Pellerin

DÉVELOPPEMENT 15

MÉTHODE DU GRADIENT À PAS CONJUGUÉ

Soit $A \in \mathrm{Sym}^{++}(n)$ et $b \in \mathbb{R}^n$, on note x_∞ la solution de $Ax = b$. On note

$$J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_\infty\}$, on pose $r_0 = b - Ax_0$ et $K_s = \mathrm{Vect}(r_0, Ar_0, \dots, A^{s-1}r_0\}$.

Lemme. — *Pour tout $s \geq 0$, J admet un unique minimum sur $x_0 + K_s$ que l'on note x_s.*

Démonstration. — Puisque A est symétrique définie positive, l'application $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ définit un produit scalaire donc, d'après le théorème de projection sur un fermé, il existe un unique $x_s \in x_0 + K_s$ tel que

$$\|x_\infty - x_s\|_A = \inf_{x \in x_0 + K_s} \|x_\infty - x\|_A .$$

Mais on a

$$\|x - x_\infty\|_A^2 = \langle Ax, x\rangle - \langle Ax_\infty, x\rangle - \langle x, Ax_\infty\rangle + \langle Ax_\infty, x_\infty\rangle = 2J(x) + \|x_\infty\|_A^2$$

d'où

$$\inf_{x \in x_0 + K_s} \|x_\infty - x\|_A^2 = 2 \inf_{x \in x_0 + K_s} J(x) + \|x_\infty\|_A^2$$

or l'application racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc J admet un unique minimum atteint en x_s. □

Lemme. — *x_∞ est l'unique minimum de J sur $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. — On réitère ce calcul en remplaçant $x_0 + K_s$ par $\mathbb{R}^n$, on obtient

$$0 = 2 \inf_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) + \|x_\infty\|_A^2$$

d'où

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) = -\frac{1}{2}\langle Ax_\infty, x_\infty\rangle = -\frac{1}{2}\langle b, x_\infty\rangle = J(x_\infty).$$

□

Lemme. — *On a $\|x_s - x_\infty\|_A = \inf_{\substack{P \in \mathbb{R}_s[X] \\ P(0)=1}} \|P(A)(x_0 - x_\infty)\|_A$.*

Démonstration. — On a $x \in x_0 + K_s$ si et seulement s'il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{s-1}) \in \mathbb{R}^s$ tels que

$$x = x_0 + \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_0 A^i r_0$$

i.e. tels que

$$x - x_\infty = x_0 - x_\infty + \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_0 A^i (b - Ax_0) = x_0 - x_\infty + \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_0 A^{i+1}(x_\infty - x_0)$$

i.e. si et seulement s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_s[X]$ vérifiant $P(0) = 1$ et tel que

$$x - x_\infty = P(A)(x_0 - x_\infty).$$

et le résultat annoncé en découle. $\square$

Proposition. — *On a* $x_\infty = x_n$.

Démonstration. — Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A et $\lambda_n \geq \cdots \geq \lambda_1 > 0$ les valeurs propres de A. On écrit

$$x_0 - x_\infty = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n \ , \ \xi_i \in \mathbb{R}$$

alors

$$\|x_0 - x_\infty\|_A^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \lambda_i.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_s[X]$ tel que $P(0) = 1$ alors

$$P(A)(x_0 - x_\infty) = P(A) \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \xi_i P(A) e_i = \sum_{i=1}^n \xi_i P(\lambda_i) e_i$$

donc

$$\|P(A)(x_0 - x_\infty)\|_A^2 = \langle A \sum_{i=1}^n \xi_i P(\lambda_i) e_i, \sum_{i=1}^n \xi_i P(\lambda_i) e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 P(\lambda_i)^2 \lambda_i$$

d'où

$$\|P(A)(x_0 - x_\infty)\|_A^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \lambda_i \right) \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |P(\lambda)|^2 .$$

Soit $L(X) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i - X}{\lambda_i}$ alors L est un polynôme de degré n, vérifiant $L(0) = 1$ et tel que $L(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ. On a donc

$$\|x_n - x_\infty\|_A^2 \leq \|L(A)(x_0 - x_\infty)\|_A \leq \|x_0 - x_\infty\|_A^2 \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |L(x)|^2 = 0$$

d'où $x_n = x_\infty$. $\square$

Leçons concernées

12 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie

19 Problèmes d'extremums

25 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples

31 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(x) = 0$. Exemples

DÉVELOPPEMENT 16

THÉORÈME DE HELLY

Théorème. — *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes d'un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_n$ soit bornée. Alors on peut extraire une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ telle que, pour tout $x \in I$, la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_n$ soit convergente.*

Démonstration. — • On note (x_n) les éléments de $\mathbb{Q} \cap I^*$. Puisque la suite $(f_n(x_0))_n$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite $(f_{\phi_0(n)}(x_0))_n$ convergente. Supposons que, pour $p \geq 0$, on ait construit $\phi_0, \ldots, \phi_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que, pour tout $0 \leq k \leq p$, la suite $(f_{\phi_0 \circ \cdots \circ \phi_k(n)}(x_k))_n$ converge. Dans ce cas, la suite $(f_{\phi_0 \circ \cdots \circ \phi_k(n)}(x_{p+1}))_n$ est bornée donc on peut en extraire une sous-suite $(f_{\phi_0 \circ \cdots \circ \phi_k \circ \phi_{k+1}(n)}(x_{p+1}))_n$ convergente. On considère la fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\psi(n) = \phi_0 \circ \cdots \circ \phi_k(n)$ alors la fonction ψ est strictement croissante donc la suite $(f_{\psi(n)}(x_p))_n$ est extraite de la suite $(f_{\phi_0 \circ \cdots \circ \phi_p(n)}(x_p))_n$. Par conséquent, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(f_{\psi(n)}(x_p))_n$ converge, on note $g(x_p)$ sa limite.

• Soit $x, y \in \mathbb{Q} \cap I$ avec $x < y$ alors (puisque $f_{\psi(n)}$ est croissante) on a $f_{\psi(n)}(x) \leq f_{\psi(n)}(y)$ d'où, en passant à la limite, $g(x) \leq g(y)$. Soit $x \in I \setminus \mathbb{Q}$, puisque $\mathbb{Q} \cap I$ est dense dans l'intervalle ouvert I, il existe $x_0 > x$ tel que $x_0 \in \mathbb{Q} \cap I$. Pour tout $y \in \mathbb{Q} \cap I$ tel que $y < x$, on a alors $g(y) \leq g(x_0)$ donc l'ensemble $E_x = \{g(y); \; ; \; y \in \mathbb{Q} \cap I \;\text{ et }\; y < x\}$ est majoré et il est non vide puisque I est ouvert. Cet ensemble admet donc une borne supérieure. On peut donc prolonger g à I en posant

$$g(x) = \sup E_x = \sup\{g(y); \; ; \; y \in \mathbb{Q} \cap I \;\text{ et }\; y < x\} \;\text{ pour }\; \text{ tout }\; x \in I \setminus \mathbb{Q}.$$

Soit $x \in I \setminus \mathbb{Q}$ et $x_0 \in \mathbb{Q} \cap I$, la définition de $g(x)$ assure que $g(x) \leq g(x_0)$ lorsque $x < x_0$ et que $g(x) \geq g(x_0)$ lorsque $x > x_0$. Si $x, x' \in I \setminus \mathbb{Q}$ avec $x < x'$ alors $E_x \subset E_{x'}$ donc $g(x) \leq g(x')$. La fonction g est donc croissante sur I.

• On note C l'ensemble des points de I où g est continue Soit $x \in C$ et $y, z \in I \cap \mathbb{Q}$ tels que $y < x < z$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_{\psi(n)}(y) \leq f_{\psi(n)}(x) \leq f_{\psi(n)}(z)$ et en passant aux limites, il vient

$$g(y) = \lim_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(y) \leq \liminf_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(x) \leq \limsup_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(x) \leq \lim_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(z) = g(z).$$

On fait ensuite tendre y et z vers x en restant dans $I \cap \mathbb{Q}$ alors, comme g est continue en x, on obtient

$$g(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(x) \leq \limsup_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(x) \leq g(x).$$

Il s'ensuit que la suite $(f_{\psi(n)}(x))_n$ est convergente, de limite $g(x)$.

Une fonction croissante n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité donc l'ensemble $D = I \setminus C$ est dénombrable. En raisonnant comme dans la première partie de la preuve, on montre qu'il existe $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(f_{\psi \circ \theta(n)}(x))_n$ converge pour tout $x \in D$. Comme par ailleurs, pour tout $x \in C$, $(f_{\psi \circ \theta(n)}(x))_n$ est une suite extraite de $(f_{\psi(n)}(x))_n$, il s'agit d'une suite convergente (de limite $g(x)$). Donc on a bien extrait une sous-suite $(f_{\psi \circ \theta(n)})_n$ de $(f_n)_n$ telle que $(f_{\psi \circ \theta(n)}(x))_n$ converge pour tout $x \in I$. $\square$

Leçons concernées

09 Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités

28 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Référence

G. Lacombe et P. Massat, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

Sébastien Pellerin

DÉVELOPPEMENT 17

THÉORÈME DE L'INVERSION LOCALE

Théorème. — *Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in \mathcal{U}$ tel que $\det J_f(a) \neq 0$. Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ de a et un voisinage $\mathcal{V}$ de $f(a)$ tels que $f : \mathcal{U}' \to \mathcal{V}$ soit un difféomorphisme.*

Démonstration. — L'application f est un difféomorphisme local en a si et seulement si l'application

$$x \mapsto (df_a)^{-1}\left(f(a+x) - f(a)\right)$$

est un difféomorphisme local en 0, on peut donc supposer que $a = 0$, $f(a) = 0$ et $df_a = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Puisque f est $\mathcal{C}^1$, il existe $r > 0$ tel que $\|x\| \leq r \Rightarrow \|df_x - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\| < \frac{1}{2}$ donc d'après l'inégalité de la moyenne

$$\forall x \in \overline{\mathbb{B}}(0,r),\ \|x - f(x)\| \leq \frac{\|x\|}{2}.$$

On fixe y tel que $\|y\| < \frac{r}{2}$ alors

$$\forall x \in \overline{\mathbb{B}}(0,r),\ \|y + x - f(x)\| \leq \|y\| + \|x - f(x)\| < r$$

et on peut donc définir l'application

$$\varphi : \overline{\mathbb{B}}(0,r) \to \overline{\mathbb{B}}(0,r), x \mapsto \varphi(x) = y + x - f(x).$$

qui est contractante puisque $\|d\varphi\| < \frac{1}{2}$ or $\overline{\mathbb{B}}(0,r)$ est une partie complète de $\mathbb{R}^n$ donc il existe un unique point $x \in \overline{\mathbb{B}}(0,r)$ tel que

$$x = \varphi(x) = y + x - f(x).$$

En fait, φ prend ses valeurs dans la boule ouverte, on a donc montré que pour tout $y \in \mathbb{B}(0, \frac{r}{2})$, il existe un unique $x \in \mathbb{B}(0,r)$ tel que $f(x) = y$ donc f réalise une bijection, que l'on note g, de $\mathcal{U} = f^{-1}\left(\mathbb{B}(0,\frac{r}{2})\right) \cap \mathbb{B}(0,r)$ sur $\mathcal{V} = \mathbb{B}(0,\frac{r}{2})$. L'application g est continue (comme restriction de f) et pour tous $x, x' \in \mathbb{B}(0,r)$, on a

$$\left\|f(x) - f(x')\right\| = \left\|\varphi(x) - \varphi(x')\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|x - x'\right\|$$

i.e. g^{-1} est 2-lipschitzienne. On a donc montré que f est un homéomorphisme local.

Soit $\alpha \in \mathcal{U}$ tel que dg_α soit inversible, on pose $\beta = g(\alpha)$ et $L = dg_\alpha$. Pour h proche de l'origine, on a $a + h \in \mathcal{U}$ et, par continuité de g, $k = g(\alpha+h) - g(\alpha)$ est proche de l'origine ; qui plus est

$$k = g(\alpha+h) - g(\alpha) \iff h = g^{-1}(\beta+k) - g^{-1}(\beta)$$

et par continuité de g et g^{-1}, on a k qui tend vers 0 si et seulement si h tend vers 0. On a

$$k = g(\alpha+h) - g(\alpha) = L(h) + \|h\|\,\varepsilon(\|h\|)$$

avec $\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, d'où

$$L^{-1}(k) = h + \|h\|\,L^{-1}(\varepsilon(\|h\|)) = g^{-1}(\beta+k) - g^{-1}(\beta) + \|h\|\,L^{-1}(\varepsilon(\|h\|)).$$

Comme $L^{-1}(k) = h + \|h\|\,L^{-1}(\varepsilon(\|h\|))$, on a

$$\|h\| \leq \|h\|\left\|L^{-1}(\varepsilon(\|h\|))\right\| + \left\|L^{-1}(k)\right\|$$

d'où

$$\|h\| \leq \frac{\left\|L^{-1}\right\|}{1 - \left\|L^{-1}(\varepsilon(\|h\|))\right\|}\,\|k\|$$

et lorsque h et k tendent vers 0, $\frac{\|L^{-1}\|}{1-\|L^{-1}(\varepsilon(\|h\|))\|}$ est borné, on note M un majorant. Il vient finalement

$$\|h\| \left\|L^{-1}(\varepsilon(\|h\|))\right\| \leq M \|k\| \left\|L^{-1}(\varepsilon(\|h\|))\right\|$$

et comme $\left\|L^{-1}(\varepsilon(\|h\|))\right\|$ tend vers 0 lorsque k tend vers 0, on a $\|h\| \left\|L^{-1}(\varepsilon(\|h\|))\right\| = o(\|k\|)$ donc

$$L^{-1}(k) = g^{-1}(\beta + k) - g^{-1}(\beta) + o(\|k\|)$$

i.e. g^{-1} est différentiable en $\beta = g(\alpha)$.

Enfin, puisque $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, puisque dg est continue et puisque dg_0 est inversible, il existe un voisinage $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ tel que dg_x soit inversible pour tout $x \in \mathcal{W}$. D'après ce qui précède, $g_{|\mathcal{W}}$ réalise une bijection de $\mathcal{W}$ sur $f(\mathcal{W})$. □

Leçons concernées

06 Utilisation de théorèmes de point fixe

15 Différentiabilité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

Référence

P. Donato, *Calcul différentiel pour la licence*, Dunod, 2000.

Sébastien Pellerin

DÉVELOPPEMENT 18

THÉORÈME DE JOHN

Théorème de John. — *Un compact K de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 dans son intérieur est contenu dans un unique ellipsoïde de volume minimal.*

Démonstration. — On note $\mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives et on définit une application $\mu : \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n}) \to \mathbb{R}$ en posant $\mu(S) = \frac{1}{\sqrt{\det S}}$. Si $R, S \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$R = {}^tP \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{bmatrix} P \quad \text{et} \quad S = {}^tP \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{bmatrix} P$$

où les r_i et s_j sont strictement positifs. La convexité de $\mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ assure que, pour tout $t \in [0,1]$, on a $(1-t)R + tS \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ d'où

$$\begin{aligned}
\mu((1-t)R + tS) &= \mu({}^tP\mathrm{diag}((1-t)r_1 + ts_1, \dots, (1-t)r_n + ts_n)P) \\
&= \left(\det({}^tP)\prod_{i=1}^n((1-t)r_i + ts_i)\det(P)\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= |\det(P)|^{-1}\prod_{i=1}^n((1-t)r_i + ts_i)^{-\frac{1}{2}} \\
&= |\det(P)|^{-1}\prod_{i=1}^n e^{-\frac{1}{2}(\log((1-t)r_i + ts_i))} \\
&\leq |\det(P)|^{-1}\prod_{i=1}^n e^{-\frac{1}{2}((1-t)\log(r_i) + t\log(s_i))}
\end{aligned}$$

par concavité du logarithme, puis

$$|\det(P)|\,\mu((1-t)R + tS) \leq \prod_{i=1}^n (r_i^{1-t}s_i^t)^{-\frac{1}{2}} \leq \left((\prod_{i=1}^n r_i)^{1-t}(\prod_{i=1}^n s_i)^t\right)^{-\frac{1}{2}}$$

et par convexité de $t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t}$, on a (en notant $R = \prod r_i$ et $S = \prod s_i$)

$$|\det(P)|\,\mu((1-t)R + tS) \leq e^{-\frac{1}{2}((1-t)\log\prod r_i + t\log\prod s_i)} \leq (1-t)e^{-\frac{1}{2}\log\prod r_i} + te^{-\frac{1}{2}\log\prod s_i}$$

i.e. $\mu((1-t)R + tS) \leq (1-t)\mu(R) + t\mu(S)$ donc l'application μ est convexe sur $\mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$. De plus, le cas d'égalité nécessite $r_i = s_i$ pour tout i *i.e.* $R = S$ et μ est donc strictement convexe.

Notons que la boule unité $\mathbb{B}_S$ pour un produit scalaire défini par $S \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ (*i.e.* pour un ellipsoïde) est l'image de la boule unité canonique $\mathbb{B}$ par $A = \sqrt{S^{-1}}$. En effet, on a

$$\|X\| \leq 1 \iff {}^tXX \leq 1 \iff {}^t(AX)S(AX) \leq 1 \iff AX \in \mathbb{B}_S.$$

Le théorème de changement de variables donne donc $v(\mathbb{B}_S) = |\det A|\,v(\mathbb{B})$ *i.e.* $v(\mathbb{B}_S) = \mu(S)v(\mathbb{B})$, il s'agit donc de minimiser μ sur l'ensemble des $S \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ telles que $K \subset \mathbb{B}_S$.

Notons que si $S \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ et $\lambda > 0$ vérifient $\lambda\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_S$ alors $|||S||| \leq \lambda^{-2}$. En effet, si $\|X\| \leq 1$ alors $\lambda X \in \mathbb{B}_S$ donc $\langle\sqrt{S}X, \sqrt{S}X\rangle = \langle SX, X\rangle \leq \lambda^{-2}$ et il s'ensuit que $|||\sqrt{S}||| \leq \lambda^{-1}$ d'où $|||S||| \leq \lambda^{-2}$.

Puisque K est borné, il existe $r > 0$ tel que $K \subset r\mathbb{B}$ *i.e.* $K \subset \mathbb{B}_{S_0}$ où $S_0 = r^{-2}\mathrm{I}_n$. On considère alors l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{S \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})\ ;\ K \subset \mathbb{B}_S \text{ et } \mu(S) \geq \mu(S_0)\}$$

qui est un ensemble convexe (du fait de la convexité de μ), non vide (puisque $S_0 \in \mathcal{C}$) et fermé (le seul point non trivial est que la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ reste symétrique *définie* positive ce qui est assuré par la condition $\mu(S) \geq \mu(S_0)$ *i.e.* $\det S \geq \det S_0 > 0$). Comme 0 est un point intérieur de K, il existe $\lambda > 0$ tel que K contienne $\lambda\mathbb{B}$ et il résulte donc de la remarque ci-dessus que $|||S||| \leq \lambda^{-2}$ pour tout $S \in \mathcal{C}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est donc compact. La fonction μ est continue sur le compact $\mathcal{C}$ donc admet un minimum qui est atteint exactement une fois du fait de la stricte convexité de μ. □

Application. — Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal.

Démonstration. — Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, on pose $K = \bigcup_{A \in G} A\mathbb{B}$. Alors K est compact (car image du compact $G \times \mathbb{B}$ par l'application continue $(A, X) \mapsto AX$) qui contient 0 dans son intérieur (puisque $\mathbb{B} \subset K$) donc K est contenu dans un unique ellipsoïde $\mathbb{B}_S$ de volume minimal.

Soit $B \in G$ alors (d'après la définition de K), on a $BK = K$ d'où $B^pK = K$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ or $\mathbb{B} \subset K \subset \mathbb{B}_{S_0}$ donc $\mathbb{B} \subset B^p\mathbb{B}_{S_0}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et il s'ensuit $1 = \mu(\mathrm{I}_n) \leq |\det B|^p\, \mu(S_0)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ donc $|\det B| = 1$. Si on pose $R = {}^tBSB$ alors $R \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$, $K \subset \mathbb{B}_R$ et $\det R = \det S$ donc $R = S$ par unicité de l'ellipsoïde $\mathbb{B}_S$. □

Leçons concernées

19 Problèmes d'extremum

28 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications

Référence

M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

DÉVELOPPEMENT 19

THÉORÈME DE JORDAN

On considère une application T-périodique $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que g soit injective sur $[0, T[$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ et $|g'(t)| = 1$ pour tout t ; on note $\Gamma = g(\mathbb{R})$.

Lemme. — *Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $0 < \varepsilon < \alpha$, les courbes*

$$g_\varepsilon^+(t) = g(t) + i\varepsilon g'(t) \quad \textit{et} \quad g_\varepsilon^-(t) = g(t) - i\varepsilon g'(t)$$

vérifient

$$\Gamma \cap g_\varepsilon^+(\mathbb{R}) = \emptyset \quad \textit{et} \quad \Gamma \cap g_\varepsilon^-(\mathbb{R}) = \emptyset.$$

Démonstration. — Puisque g est de classe $\mathcal{C}^1$, g' est uniformément continue sur $[0, 2L]$ donc

$$\exists \eta > 0 \ / \ \forall s, t \in \mathbb{R}, |s - t| < \eta \Rightarrow \left|g'(s) - g'(t)\right| < 1.$$

Quitte à fixer t et à considérer la fonction définie par $h(s) = g(s) - g(t) - (s - t)g'(t)$, il découle du théorème des accroissements finis que

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, |s - t| < \eta \Rightarrow \left|g(s) - g(t) - (s - t)g'(t)\right| < |s - t| .$$

Puisque $(s, t) \mapsto |g(s) - g(t)|$ est continue et puisque l'ensemble

$$K = [0, L]^2 \cap \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \forall n \in \mathbb{Z}, |s - t + nL| \geq \eta\}$$

est compact, il existe $(s_0, t_0) \in K$ tel que

$$\alpha = |g(s_0) - g(t_0)| = \inf_{(s,t)\in K} |g(s) - g(t)| .$$

Puisque $(s_0, t_0) \in K$, on ne peut pas avoir $s_0 = t_0 + nL$ avec $n \in \mathbb{Z}$ donc $g(s_0) \neq g(t_0)$ *i.e.* $\alpha > 0$. Si $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ vérifient $|s - t + nL| \geq \eta$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors on note $s' = s + kL \in [0, L]$ et $t' = t + \ell L \in [0, L]$ où $k, \ell \in \mathbb{Z}$ et on a donc aussi $|s - t + nL| \geq \eta$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. D'après ce qui précède, il vient $|g(s) - g(t)| = |g(s') - g(t')| \geq \alpha$. On a donc

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, (\forall n \in \mathbb{Z}, |s - t + nL| \geq \eta) \Rightarrow |g(s) - g(t)| \geq \alpha > 0.$$

Supposons que $\Gamma \cap g_\varepsilon^+(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ *i.e.* il existe $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $g(t) = g(s) + i\varepsilon g'(s)$, d'où

$$|g(t) - g(s)| = \left|i\varepsilon g'(s)\right| = \varepsilon < \alpha$$

et il résulte du choix de α qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|s - t + nL| < \eta$ donc, quitte à changer t en $t - nL$, on peut supposer que $|s - t| < \eta$. D'après le choix de η, on a donc

$$\left|-i\varepsilon g'(s) - (t - s)g'(s)\right| = \left|g(t) - g(s) - (t - s)g'(s)\right| < |t - s|$$

or $|g'(s)| = 1$ d'où $|-i\varepsilon - (t - s)| < |t - s|$, ce qui est absurde. On a donc $\Gamma \cap g_\varepsilon^+(\mathbb{R}) = \emptyset$ et on obtient de même $\Gamma \cap g_\varepsilon^-(\mathbb{R}) = \emptyset$. $\square$

Théorème de Jordan. — *$\mathbb{C}\setminus\Gamma$ a deux composantes connexes.*

Démonstration. — • Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma$ alors $\theta(t)=|z-g(t)|^2$ est L-périodique et continue donc atteint un minimum $g(t_1)$ mais $\theta(t)=(z-g(t))(\overline{z}-\overline{g(t)})=z\overline{z}-g(t)\overline{z}-z\overline{g(t)}+g(t)\overline{g(t)}$ donc

$$\theta'(t)=-g'(t)\overline{z}-z\overline{g'(t)}+g(t)'\overline{g(t)}+g(t)\overline{g(t')}=g'(t)(\overline{g(t)}-\overline{z})+(g(t)-z)\overline{g'(t)}=2\mathrm{Re}\left(g'(t)(g(t)-z)\right)$$

d'où Re $(g'(t_1)(g(t_1)-z))=0$ *i.e.* $g'(t_1)$ et $g(t_1)-z$ sont orthogonaux.

La demi-droite $[g(t_1),z)$ contient $g(t_1)+i\varepsilon g'(t_1)$ ou $g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)$, par exemple $g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)$. Deux cas sont possibles :

- soit $g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)$ est sur le segment $[g(t_1),z]$ auquel cas la définition de $g(t_1)$ (comme étant le point de Γ à distance minimale de z) assure que le segment $[g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1),z]$ ne contient aucun point de Γ,
- soit z est sur le segment $[g(t_1),g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)]$ auquel cas tout point du segment $[z,g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1),z]$ est de la forme $g(t_1)-i\delta g'(t_1)$ avec $\delta<\varepsilon$ mais on a vu que $g_\delta^-(\mathbb{R})\cap\Gamma=\emptyset$ donc le segment $[z,g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)]$ ne contient aucun point de Γ.

Dans les deux cas, z peut être joint par un segment ne coupant pas Γ au point $g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)$ donc, en considérant l'arc $g_\varepsilon^-(\mathbb{R})$, au point $g_\varepsilon^-(0)$. Ainsi, tout point de $z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma$ peut être joint par un arc à $g_\varepsilon^-(\mathbb{R})$ ou $g_\varepsilon^+(\mathbb{R})$. Il s'ensuit que $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ a au plus deux composantes connexes.

• Notons que $z_\varepsilon^+=g_\varepsilon^+(0)=i\varepsilon$ et $z_\varepsilon^-=g_\varepsilon^-(0)=-i\varepsilon$ donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_g(z_\varepsilon^+)-\mathrm{Ind}_g(z_\varepsilon^-)&=\frac{1}{2i\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{g'(t)}{g(t)-z_\varepsilon^+}dt-\frac{1}{2i\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{g'(t)}{g(t)-z_\varepsilon^-}dt\\&=\frac{1}{2i\pi}\int_{-L/2}^{L/2}g'(t)\frac{2i\varepsilon}{g(t)^2+\varepsilon^2}dt\\&=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{g'(t)}{g(t)^2+\varepsilon^2}dt.\end{aligned}$$

On pose $a(t)=\frac{g(t)}{t}$ et $a(0)=1$ alors il existe $0<\delta<\frac{L}{2}$ tel que $\left|a(t)^2-1\right|<\frac12$ pour tout $-\delta<t<\delta$. Comme g ne s'annule pas sur le compact $\{t;\delta\le|t|\le\frac{L}{2}\}$, on a

$$\int_{\delta\le|t|\le\frac{L}{2}}\frac{g'(t)}{g(t)^2+\varepsilon^2}dt\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}\int_{\delta\le|t|\le\frac{L}{2}}\frac{g'}{g^2}\quad\text{d'où}\quad\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\delta\le|t|\le\frac{L}{2}}\frac{g'(t)}{g(t)^2+\varepsilon^2}dt\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}0.$$

D'autre part

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{|t|<\delta}\frac{g'(t)}{g(t)^2+\varepsilon^2}dt=\frac{\varepsilon^2}{\pi}\int_{|u|<\frac{\delta}{\varepsilon}}\frac{g'(\varepsilon u)}{g(\varepsilon u)^2+\varepsilon^2}du=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{g'(\varepsilon u)}{u^2a(\varepsilon u)^2+1}\mathbb{1}_{[-\frac{\delta}{\varepsilon},\frac{\delta}{\varepsilon}]}(u)du$$

mais

$$\frac{g'(\varepsilon u)}{u^2a(\varepsilon u)^2+1}\mathbb{1}_{[-\frac{\delta}{\varepsilon},\frac{\delta}{\varepsilon}]}(u)\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}\frac{1}{u^2+1}$$

et Re $a(\varepsilon u)^2\ge\frac12$ pour $|u|\le\frac{\delta}{\varepsilon}$ donc

$$\left|\frac{g'(\varepsilon u)}{u^2a(\varepsilon u)^2+1}\mathbb{1}_{[-\frac{\delta}{\varepsilon},\frac{\delta}{\varepsilon}]}(u)\right|\le\frac{\|g'\|_\infty}{\frac{u^2}{2}+1}$$

et cette majoration vaut aussi pour $|u|>\frac{\delta}{\varepsilon}$. Le théorème de convergence dominée donne alors

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{g'(\varepsilon u)}{u^2a(\varepsilon u)^2+1}\mathbb{1}_{[-\frac{\delta}{\varepsilon},\frac{\delta}{\varepsilon}]}(u)du\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{du}{u^2+1}=1$$

i.e. $\mathrm{Ind}_g(z_\varepsilon^+)-\mathrm{Ind}_g(z_\varepsilon^+)\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}1$. Or la fonction $z\mapsto\mathrm{Ind}_g(z)$ est continue sur $\mathbb{C}\setminus g$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ n'est pas connexe. $\square$

Leçons concernées

03 Utilisation de la notion de compacité

04 Connexité. Exemples et applications

16 Étude de courbes. Exemples

Références

S. Gonnord et N. Tosel, *Calcul différentiel*, Ellipses, 1998.

Première épreuve du concours d'entrée à l'École Polytechnique 1993, option M', in B. Gugger, *Problèmes corrigés de mathématiques posés au concours de Polytechnique, tome 5*, Ellipses, 1996.

Sébastien Pellerin

DÉVELOPPEMENT 20

OPÉRATEURS HYPERCYCLIQUES

Soit (E, d) un $\mathbb{C}-$espace vectoriel métrique complet séparable et A un opérateur continu de E.

Définition. — A est dit *hypercyclique* s'il existe $x \in E$ tel que $\{A^n(x), n \geq 0\}$ soit dense dans E.

Théorème. — *Pour que A soit hypercyclique, il suffit qu'il existe X et Y denses dans E et $B : Y \to Y$ tels que pour tous $x \in X$ et $y \in Y$ on ait $A^n(x) \to 0$, $B^n(y) \to 0$ et $AB(y) = y$.*

Démonstration. — • Tout d'abord, notons $HC(A)$ l'ensemble des $x \in E$ dont l'orbite $\{A^n(x), n \geq 0\}$ est dense dans E et S une partie dénombrable dense de E. Si $x \in HC(A)$ alors son orbite coupe toute boule ouverte donc pour tout $s \in S$ et tout $k \geq 1$, il existe $n \geq 0$ tel que $A^n(x) \in \mathbb{B}(s, \frac{1}{k})$ *i.e.* $x \in \Omega_{s,k}$ où

$$\Omega_{s,k} = \bigcup_{n \geq 0} (A^n)^{-1}(\mathbb{B}(s, \frac{1}{k})).$$

Supposons maintenant que $x \in \Omega_{s,k}$ pour tous $s \in S$ et $k \geq 1$. Considérons une boule ouverte $\mathbb{B}(y, \varepsilon)$, par densité de S dans E, il existe $s \in S$ tel que $d(s, y) < \frac{\varepsilon}{2}$; considérons un entier $k \geq 1$ tel que $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Par hypothèse sur x, on a $x \in \Omega_{s,k}$ *i.e.* il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $A^{n_0}(x) \in \mathbb{B}(s, \frac{1}{k})$, il s'ensuit par inégalité triangulaire que

$$d(A^{n_0}(x), y) \leq d(A^{n_0}(x), s) + d(s, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

i.e. l'orbite de x coupe toute boule ouverte $\mathbb{B}(y, \varepsilon)$ ce qui signifie que cette orbite est dense dans E. On a donc finalement

$$HC(A) = \bigcap_{\substack{s \in S \\ k \in \mathbb{N}^*}} \Omega_{s,k}.$$

Puisque l'opérateur A est continu, les $\Omega_{s,k}$ sont des ouverts de E donc $HC(A)$ est une intersection dénombrable d'ouverts de E.

• Considérons maintenant deux parties X et Y denses dans E et une application $B : Y \to Y$ vérifiant, pour tous $x \in X$ et $y \in Y$: $A^n(x) \to 0$, $B^n(y) \to 0$ et $AB(y) = y$. Montrer que A est hypercyclique revient à montrer que $HC(A) \neq \emptyset$, on va en fait montrer que $HC(A)$ est dense dans E ; d'après le théorème de Baire, il s'agit donc de montrer que les ouverts $\Omega_{s,k}$ sont denses dans E. Considérons un tel ouvert $\Omega_{s,k}$ et une boule ouverte $\mathbb{B}(y, \varepsilon)$ et montrons que $\Omega_{s,k} \cap \mathbb{B}(y, \varepsilon) \neq \emptyset$. Par densité de X et Y dans E, il existe $a \in X$ et $b \in Y$ tels que $d(a, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(b, s) < \frac{1}{2k}$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $x_n = a + B^n(b)$, alors $A^n(x_n) = A^n(a) + A^n B^n(b)$. Mais on a $AB(c) = c$ pour tout $c \in Y$, on en déduit aisément par récurrence (et puisque Y est stable par B) que $A^n B^n(b) = b$, d'où $A^n(x_n) = A^n(a) + b$ pour tout $n \geq 0$. On a alors

$$d\left(A^n(x_n), s\right) = d\left(A^n(a) + b, s\right) \leq d\left(A^n(a) + b, b\right) + d(b, s) < d\left(A^n(a) + b, b\right) + \frac{1}{2k}.$$

Or l'addition avec b (*i.e.* l'application $E \to E, t \mapsto t+b$) est continue sur E et $A^n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par hypothèse donc il existe un entier $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1 \ , \ d\left(A^n(x_n), s\right) < \frac{1}{k}$$

i.e. $x_n \in \Omega_{s,k}$ pour tout $n \geq N_1$. D'autre part, on a

$$d(x_n, y) = d\left(a + B^n(b), y\right) \leq d\left(a + B^n(b), a\right) + d\left(a, y\right) < d\left(a + B^n(b), a\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or l'addition avec a (*i.e.* l'application $E \to E, t \mapsto t+a$) est continue sur E et $B^n(b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par hypothèse donc il existe un entier $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2 \ , \ d(x_n, y) < \varepsilon$$

i.e. $x_n \in \mathbb{B}(y, \varepsilon)$ pour tout $n \geq N_2$. Ainsi, si $n \geq \sup\{N_1, N_2\}$, on a

$$x_n \in \mathbb{B}(y,\varepsilon) \quad \text{et} \quad x_n \in \Omega_{s,k}$$

i.e. on a bien la densité des $\Omega_{s,k}$ dans E et, d'après la remarque ci-dessus, il s'ensuit que l'opérateur A est hypercyclique. □

Application. — L'opérateur de dérivation sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est hypercylique.

Démonstration. — On considère l'espace des fonctions entières $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ muni de la topologie de la convergence compacte *i.e.* par exemple

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)} \quad \text{où} \quad d_n(f,g) = \sup_{|\zeta| \leq n} |f(\zeta) - g(\zeta)| \, .$$

L'espace $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ muni de cette métrique est complet et séparable. On considère pour X et Y l'ensemble $\mathbb{C}[z]$ des polynômes complexes qui sont bien des parties denses dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ (il suffit de tronquer le développement en série entière en 0) et on pose

$$B : \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z] \ , \ \sum_{p=0}^{d} a_p X^p \mapsto \sum_{p=0}^{d} \frac{a_p}{p+1} X^{p+1}.$$

Soit $P \in \mathbb{C}[z]$, on a $AB(P) = P$, d'autre part il est clair que $A^n(P)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini puisque $A^n(P)$ est nul dès que n dépasse le degré de P. Il reste à montrer que $B^n(P)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, par linéarité de B il suffit de le montrer pour un monôme $P = z^p$; on a $B^n(z^p) = \frac{1}{(p+1)\ldots(p+n)} z^{p+n}$ d'où

$$\sup_{|\zeta| \leq \kappa} |B^n(\zeta^p)| = \frac{\kappa^{p+n}}{(p+1)\ldots(p+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi $B^n(P)$ tend vers 0 uniformément sur tout compact quand n tend vers l'infini et il s'ensuit que $B^n(P)$ tend vers 0 pour la distance d quand n tend vers l'infini. L'opérateur A est donc bien hypercyclique. □

Application. — Soit $\lambda > 1$ et $(e_i)_{i \geq 0}$ une base hilbertienne de $E = \ell^2$. L'opérateur A de E défini par $Ae_0 = 0$ et $Ae_{i+1} = \lambda e_i$ pour $i \geq 0$ est hypercylique.

Démonstration. — On considère l'espace $E = \ell^2(\mathbb{C})$ muni de sa structure hilbertienne ; il s'agit bien d'un espace complet séparable. On désigne par X l'ensemble des suites complexes nulles à partir d'un certain rang, par Y l'espace E et par B l'opérateur défini par $B(e_i) = \frac{1}{\lambda} e_{i+1}$ pour tout $i \geq 0$. Toutes les conditions du critères sont vérifiées : X et Y sont denses dans E, $AB(u) = u$ pour tout $u \in Y$, si $u \in X$ alors $A^n(u) = 0$ pour n assez grand et *a fortiori* $A^n(u)$ tend vers 0 quand n tend l'infini, enfin si $u \in Y$ alors $\|B^n(u)\|_2 = \frac{1}{\lambda^n} \|u\|_2$ or $\lambda > 1$ donc $\|B^n(u)\|_2$ tend vers 0 quand n tend l'infini. □

Leçons concernées

01 Espaces de fonctions. Exemples et applications

02 Exemples de parties denses et applications

05 Espaces complets. Exemples et applications

09 Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités

10 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications

25 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$.Exemples

Compléments

Structure de $HC(A)$. —
Supposons $HC(A)$ non vide alors $HC(A)$ contient un point $x \in E$ d'orbite dense. L'espace vectoriel E ne contient pas de point isolé or, pour tout $k \geq 0$, l'orbite de $A^k(x)$ ne diffère de l'orbite de x que par un nombre fini d'éléments, il s'ensuit que l'orbite de $A^k(x)$ est aussi dense dans E *i.e.* $A^k(x)$ est hypercylique. Par conséquent, $HC(A)$ contient l'orbite de x qui est une partie dense de E donc $HC(A)$ est dense dans E. Mais on a vu que $HC(A)$ est une intersection dénombrable d'ouverts donc $HC(A)$ est soit vide, soit un G_δ dense.

Le cas de la dimension finie. —
Supposons que E soit de dimension finie et considérons sa décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{s} F_{\lambda_i}$en sous-espaces caractéristiques. Supposons que A soit hypercyclique alors il existe $x \in E$ d'orbite dense. On écrit $x = x_1 + \cdots + x_s$ avec $x_i \in F_{\lambda_i}$ alors $A^n(x) = A^n(x_1) + \cdots + A^n(x_s)$ avec $A^n(x_i) \in F_{\lambda_i}$ pour tout $1 \leq i \leq s$. Il s'ensuit que pour toute valeur propre λ de A, la restriction A_λ de A à F_λ est un opérateur hypercylique. On a $A_\lambda = \lambda \mathrm{Id} + N$ où N est nilpotent donc, en notant d_λ la dimension de F_λ et pour $n \geq d_\lambda$, on a

$$A_\lambda^n(x) = \sum_{k=0}^{d_\lambda - 1} \mathrm{C}_n^k \lambda^{n-k} N^k(x).$$

Si x est d'orbite dense alors $N^0(x), N^1(x), \ldots, N^{d_\lambda - 1}(x)$ forment une base de F_λ et, pour tout $0 \leq k \leq d_\lambda - 1$, la suite $(\mathrm{C}_n^k \lambda^{n-k})_{n \geq 0}$ est dense dans $\mathbb{C}$. Cette dernière condition est impossible puisque la suite $(|\mathrm{C}_n^k \lambda^{n-k}|)_{n \geq d_\lambda}$ tend soit vers 0, soit vers l'infini, soit est constante égale à 1. Il en résulte que, dans le cas d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie, aucun opérateur n'est hypercyclique.

Un autre exemple. —
L'opérateur A sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ qui à f associe l'application $z \mapsto f(z+1)$ est hypercyclique. On note X l'ensemble des applications de la forme $z \mapsto e^{-z}P(z)$ où $P \in \mathbb{C}[z]$, Y l'ensemble des applications de la forme $z \mapsto e^{z}P(z)$ où $P \in \mathbb{C}[z]$ et B est l'application qui à f associe l'application $z \mapsto f(z-1)$. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ alors l'application $z \mapsto e^z f(z)$ est aussi entière donc approchable uniformément sur les compacts par une suite $(P_n)_n$ de polynômes donc f est approchable uniformément sur les compacts par la suite des applications $z \mapsto e^{-z}P_n$ *i.e.* X est dense dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. On obtient de même la densité de Y dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ et les autres vérifications sont claires.

Quelques commentaires sur le *shift*. —

• Dans la seconde application, le cas où $0 \leq \lambda \leq 1$ ne peut pas correspondre à un opérateur hypercyclique puisque dans ce cas on a $\|A^n(x)\| \leq |\lambda^n| \, \|x\| \leq \|x\|$ donc aucune orbite n'est dense.

• On note A l'opérateur défini dans la seconde application et on considère $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $|\mu| < 1$. Alors la suite $x_\mu = (\mu^k)_{k\geq 0}$ est clairement dans ℓ^2 et on vérifie aisément qu'il s'agit d'un vecteur propre pour A associé à la valeur propre μ ; on note F le sous-espace engendré par ces vecteurs. Considérons une suite $x = (x_k)_{k\geq 0}$ de ℓ^2 telle que $\langle x, x_\mu \rangle = 0$ pour tout $|\mu| < 1$ *i.e.* on a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k \mu^k = 0$ pour tout $|\mu| < 1$ ce qui implique que $x = 0$ d'après le théorème des zéros isolés. Cela signifie que l'orthogonal de F est trivial donc que F est dense. Ainsi, l'opérateur A est hypercyclique mais admet un sous-espace invariant dense dans ℓ^2.

Si A est hypercyclique alors $HC(A)$ contient un sous-espace dense de H. —

On considère ici un opérateur hypercyclique A d'un espace de Hilbert H. Si x est un point d'orbite dense alors pour tout $y \in H$ non nul l'ensemble $\{\langle y, A^n x\rangle, n \geq 0\}$ est dense dans H (il suffit de remarquer que l'application $\xi \mapsto \langle y, \xi \rangle$ est continue et surjective de H dans $\mathbb{C}$).

Considérons maintenant un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul alors l'image de $P(A)$ est dense. En effet, si ce n'est pas le cas alors $(\mathrm{Im}\, P(A))^\perp = \ker P(A)^*$ contient un vecteur non nul *i.e.* $P(A)^*$ n'est pas injectif. Puisque c'est clairement absurde lorsque P est constant on peut, quitte à normaliser P, supposer que l'on a $P(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$ d'où

$$P(A)^* = (A^* - \overline{\lambda_1} I) \cdots (A^* - \overline{\lambda_n} I)$$

et le fait que $P(A)^*$ ne soit pas injectif signifie donc que A^* admet un vecteur propre : on écrit $Ay = \lambda y$ avec y non nul. On a donc pour tout $n \geq 0$

$$\langle y, A^n x \rangle = \langle A^{*n} y, x \rangle = \overline{\lambda}^n \langle y, x \rangle$$

Mais la suite $(\overline{\lambda}^n)_n$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$, on a donc une contradiction avec la remarque ci-dessus.

Notons $O_A(y)$ l'orbite de $y \in H$, on a clairement $O_A(P(A)x)) = P(A)(O_A(x))$ d'où par continuité de $P(A)$: $P(A)(\overline{O_A(x)}) \subset \overline{P(A)(O_A(x))} = \overline{O_A(P(A)x)}$. Mais si x est d'orbite dense alors $\overline{O_A(x)} = H$ or $P(A)$ est d'image dense donc $\overline{O_A(P(A)x)}$ contient une partie dense *i.e.* $P(A)x$ est aussi d'orbite dense. Ainsi, si A contient un point x d'orbite dense alors l'espace vectoriel $J = \{P(A)x, P \in \mathbb{C}[X]\}$ est un sous-espace dense de H formé de vecteurs d'orbite dense *i.e.* $HC(A)$ contient un sous-espace dense.

Le cas d'un opérateur compact. —

On considère ici un opérateur compact A d'un espace de Hilbert H. On admet les résultats suivants :
- $\rho(A) = \rho(A^*)$
- si A est compact alors $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \text{ non inversible}\}$ est un compact de $\mathbb{C}$
- A^* est compact
- si $\rho(A) = |\lambda|$ alors λ est une valeur propre de A

Si $\rho(A) = 0$ *i.e.* si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|A^n\|^{1/n} = 0$ alors A^n tend vers 0 donc A n'est pas hypercyclique. Sinon on a $\rho(A) > 0$ *i.e.* $\rho(A^*) > 0$ donc il existe $\lambda \in \sigma(A^*)$ telle que $|\lambda| = \rho(A^*)$. Or A est compact donc A^* est compact et il en résulte que λ est une valeur propre de A^* mais on a vu dans un commentaire précédent que c'est incompatible avec l'exitence d'un vecteur d'orbite dense pour A. Par conséquent, un opérateur compact n'est jamais hypercyclique.

Références

S. Gonnord et N. Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses, 1996.

Sujet d'analyse de l'agrégation externe 1999.

Sébastien Pellerin

DÉVELOPPEMENT 21

THÉORÈME DE STABILITÉ DE LIAPOUNOV

Théorème de Liapounov. — *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f(0) = 0$ et telle que* $\mathrm{Re}\ \lambda < 0$ *pour toute valeur propre λ de df_0. Alors pour x_0 voisin de 0, la solution $x(t)$ de $X' = f(X), X(0) = x_0$ tend exponentiellement vers 0 lorsque t tend vers l'infini.*

Démonstration. — • Soit A la matrice de df_0 dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A_1 = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & t_{i,j} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad |t_{i,j}| \leq \varepsilon,$$

on note B la matrice diagonale et C la matrice nilpotente. On note $x(t)$ une solution de $X' = f(X)$ et $z(t)$ une solution de $X' = AX$; on sait que $z(t) = e^{tA}z(0)$ mais on souhaite retrouver le comportement asymptotique de cette solution. En posant $z_1(t) = Pz(t)$, on obtient une solution de $X' = A_1X$. On peut alors écrire

$$\frac{d}{dt}\|z_1(t)\|^2 = 2\mathrm{Re}\ \langle z_1'(t), z_1(t)\rangle = 2\mathrm{Re}\ \langle A_1z_1(t), z_1(t)\rangle = 2\mathrm{Re}\ \langle Bz_1(t), z_1(t)\rangle + 2\mathrm{Re}\ \langle Cz_1(t), z_1(t)\rangle.$$

Soit $\Lambda > 0$ tel que $-\Lambda = \sup \mathrm{Re}\ \lambda_i$, alors

$$\mathrm{Re}\ \langle Bz_1, z_1\rangle = \mathrm{Re}\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \zeta_{1,i}\overline{\zeta_{1,i}} = \sum_{i=1}^n \mathrm{Re}\ \lambda_i\, |\zeta_{1,i}|^2 \leq -\Lambda\, \|z_1\|^2$$

et il existe une constante $d > 0$ telle que

$$|\langle Cz_1, z_1\rangle| \leq \|\!|C|\!\|\, \|z_1\|^2 \leq d\varepsilon\, \|z_1\|^2 .$$

On obtient donc (quitte à choisir ε petit)

$$\frac{d}{dt}\|z_1(t)\|^2 \leq (-2\Lambda + 2d\varepsilon)\, \|z_1(t)\|^2 \leq -a\, \|z_1(t)\|^2$$

avec $a > 0$. Il en résulte que pour tout t on a

$$\|z_1(t)\|^2 \leq e^{-at}\, \|z_1(0)\|^2$$

puis qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|z(t)\|^2 \leq ce^{-at}\, \|z(0)\|^2 .$$

• Ce qui précède permet de définir un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ par

$$b(V, W) = \int_0^{+\infty} \langle e^{sA}V, e^{sA}W\rangle ds$$

dont on note respectivement q et N la forme quadratique et la norme associées ; en écrivant

$$q(V + tW) = q(V) + t^2q(W) + 2tb(V, W)$$

puis en dérivant pour $t = 0$, on obtient

$$dq_V(W) = \frac{d}{dt}q(V + tW)\Big]_{t=0} = 2b(V, W).$$

• On pose $f(u) = Au + r(u)$ alors

$$(q(x(t)))' = dq_{x(t)}\left(x'(t)\right) = 2b\left(x(t), x'(t)\right) = 2b\left(x(t), Ax(t)\right) + 2b\left(x(t), r(x(t))\right)$$

or pour tout $V \in \mathbb{R}^n$ on a

$$2b\left(V, AV\right) = \int_0^{+\infty} 2\langle e^{sA}V, e^{sA}AV\rangle ds = \left[\left\|e^{sA}V\right\|^2\right]_{s=0}^{s\to+\infty} = -\left\|V\right\|^2$$

d'où

$$(q(x(t)))' = -\left\|x(t)\right\|^2 + 2b\left(x(t), r(x(t))\right).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left|b\left(x(t), r(x(t))\right)\right| \leq N\left(x(t)\right) N\left(r(x(t))\right)$$

mais $r(u) = f(u) - f(0) - df_0(u)$ donc par définition de la différentiabilité, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$N(u) \leq \alpha \Rightarrow N(r(u)) \leq \varepsilon N(u)$$

et il en résulte que pour $N(x(t)) \leq \alpha$ on a

$$(q(x(t)))' = -\left\|x(t)\right\|^2 + 2\varepsilon N\left(x(t)\right)^2 \leq -\left\|x(t)\right\|^2 + 2\varepsilon q\left(x(t)\right).$$

L'équivalence des normes N et $\| \ \|$ montre que, quitte à choisir ε petit, on a

$$(q(x(t)))' \leq -\beta q\left(x(t)\right) \quad \text{avec} \quad \beta > 0.$$

• Tout d'abord on en déduit si $N(x_0) \leq \alpha$ alors $N\left(x(t)\right) \leq \alpha$ pour $t \geq 0$; en effet, sinon il existe un plus petit instant t_1 tel que $N\left(x(t_1)\right) = \alpha$ or $N\left(x(t)\right)$ décroît au voisinage de t_1 et la valeur α est donc censée être atteinte avant t_1 ! D'autre part, $N\left(x(t)\right)$ décroît sur le domaine de définition de $x(t)$ donc $x(t)$ n'explose pas en temps fini *i.e.* la solution $x(t)$ est définie sur $[0, +\infty[$. Enfin, on a

$$\left(e^{\beta t} q\left(x(t)\right)\right)' = e^{\beta t}\left((q(x(t)))' + \beta q\left(x(t)\right)\right) \leq 0$$

donc pour tout $t \geq 0$, on a

$$q\left(x(t)\right) \leq e^{-\beta t} q(x_0)$$

i.e. $x(t)$ tend exponentiellement vers 0. □

Leçons concernées

15 Différentiabilité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

20 Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'tudes qualitatives de solutions

21 Équations différentielles linéaires. Exemples

Références

J. Hubbard et B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, 1999.

F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.

DÉVELOPPEMENT 22

MÉTHODE DE NEWTON POUR LES POLYNÔMES

On considère un polynôme

$$P(x) = (x - \xi_1)^{m_1} \cdots (x - \xi_r)^{m_r}$$

où $\xi_1 < \cdots < \xi_r$ sont des réels et les m_i sont des entiers non nuls. On pose

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}.$$

Proposition. — *Si $x_0 > \xi_r$ alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ décroît strictement et converge vers ξ_r.*

Démonstration. — Pour tout x, on a

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = (\log|P(x)|)' = \left(\sum_{i=1}^{r} m_i \log|(x - \xi_i)|\right)' = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x - \xi_i}$$

d'où pour tout $n \geq 0$

$$x_{n+1} = x_n - \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x_n - \xi_i}\right)^{-1}.$$

En particulier, si $x_n > \xi_r$ alors $x_{n+1} < x_n$. La fonction f définie par $f(x) = x - \dfrac{P(x)}{P'(x)}$ se prolonge par continuité à $[\xi_r, +\infty[$ en posant $f(\xi_r) = \xi_r$ et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = 1 - \frac{(P'(x))^2 - P(x)P''(x)}{(P'(x))^2} = \frac{P(x)P''(x)}{(P'(x))^2}.$$

Mais d'après le théorème de Gauss-Lucas, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de celles de P donc sont dans $[\xi_1, \xi_r]$ et de même pour les racines de P''. Puisque P est unitaire, P, P' et P'' sont strictement positifs sur $[\xi_r, +\infty[$ donc $f' > 0$ et il s'ensuit que f est strictement croissante. Le fait que $\xi_r < x_n$ implique donc que $\xi_r = f(\xi_r) < f(x_n) = x_{n+1}$. La condition $x_0 > \xi_r$ implique donc par récurrence que $x_n > \xi_r$ pour tout $n \geq 0$ et que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ décroît strictement. Enfin, comme cette suite est minorée par ξ_r, elle converge vers un élément qui annule $\frac{P}{P'}$ *i.e.* vers ξ_r. □

Proposition. — *Si $m_r = 1$ alors pour tout $c > 0$, on a $|x_n - \xi_r| = o(c^n)$.*

Démonstration. — Comme $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x - \xi_i}$, on a en dérivant

$$\frac{P''(x)(x)P(x) - (P'(x))^2}{(P(x))^2} = -\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x - \xi_i)^2}$$

i.e.

$$\frac{P''(x)(x)P(x)}{(P(x))^2} = \frac{(P'(x))^2}{(P(x))^2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x - \xi_i)^2}$$

d'où

$$f'(x) = \frac{P(x)P''(x)}{(P'(x))^2} = \frac{P(x)P''(x)}{(P(x))^2}\,\frac{(P(x))^2}{(P'(x))^2} = 1 - \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x-\xi_i}\right)^{-2} \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x-\xi_i)^2}$$

d'où $\displaystyle\lim_{x\to\xi_r} f'(x) = 1 - \frac{1}{m_r}$.

Si $m_r = 1$ alors $f'(\xi_r) = 0$ mais la formule de Taylor-Lagrange donne $y_n \in]\xi_r, x_n[$ tel que

$$x_{n+1} - \xi_r = f(x_n) - f(\xi_r) = (x_n - \xi_r)f'(y_n).$$

Soit $c > 0$, comme x_n tend vers ξ_r, il existe un rang n_0 à partir duquel $|f'(y_n)| < c$ d'où

$$|x_{n+1} - \xi_r| \leq c\,|x_n - \xi_r|$$

puis pour tout $n \geq n_0$

$$|x_n - \xi_r| \leq c^{n-n_0}\,|x_{n_0} - \xi_r| = O(c^n)$$

et quitte à prendre $0 < d < c$, il vient $|x_n - \xi_r| = o(d^n)$. □

Proposition. — *Si $m_r \geq 2$ alors il existe $c > 0$ tel que $|x_n - \xi_r| \sim c\left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n$.*

Démonstration. — Comme plus haut, on a $f'(\xi_r) = 1 - \frac{1}{m_r}$ et la formule de Taylor-Lagrange donne $y_n \in]\xi_r, x_n[$ tel que $x_{n+1} - \xi_r = (x_n - \xi_r)f'(y_n)$ d'où

$$\log(x_{n+1} - \xi_r) - \log(x_n - \xi_r) = \log f'(y_n)$$

qui converge vers $\log f'(\xi_r)$ quand n tend vers l'infini donc, d'après le théorème de Cesáro, $\log(x_n - \xi_r)$ est équivalent à $n \log f'(\xi_r)$ quand n tend vers l'infini ; en particulier, pour tout $1 > d > f'(\xi_r)$, on a $|x_n - \xi_r| = O(d^n)$. D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $z_n \in]\xi_r, x_n[$ tel que

$$x_{n+1} - \xi_r = f'(\xi_r)(x_n - \xi_r) + \frac{f''(z_n)}{2}(x_n - \xi_r)^2$$

d'où

$$\varepsilon_n = \frac{x_{n+1} - \xi_r}{f'(\xi_r)(x_n - \xi_r)} - 1 = O(x_n - \xi_r)$$

et il s'ensuit que la série de terme général

$$\log(x_{n+1} - \xi_r) - \log(x_n - \xi_r) - \log f'(\xi_r) = \log(1 + \varepsilon_n) = O(d^n)$$

converge. Par conséquent, $\log(x_n - \xi_r) - n \log f'(\xi_r)$ converge vers un réel λ donc $x_n - \xi_r \simeq e^{\lambda} f'(\xi_r)^n$ quand n tend vers l'infini. □

Leçons concernées

15 Différentiabilité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

18 Application des formules de Taylor et des développements limits

23 Convergence des suites numériques. Exemples et applications

24a Comportement asymptotique des suites numériques. Exemples

24b Rapidité de convergence d'un suite. Exemples

25 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples

27 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples

28 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

31 Méthodes d'approximation des solutions d'une quation $F(x) = 0$. Exemples

Sébastien Pellerin

Complément

Localisation des racines de P'. —
Le théorème de Gauss-Lucas affirme que les racines de P' sont dans (l'intérieur de) l'enveloppe convexe des racines (dans $\mathbb{C}$) de P. En effet, écrivons $P = (X - \xi_1)^{m_1} \cdots (X - \xi_r)^{m_r}$ alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X - \xi_i}.$$

Soit ζ une racine de P'. S'il s'agit aussi d'une racine de P alors le résultat est clair, sinon on a

$$\sum_{i=1}^{r} m_i \frac{\overline{\zeta} - \overline{\xi_i}}{|\zeta - \xi_i|^2} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{\zeta - \xi_i} = 0$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{r} m_i \frac{\zeta - \xi_i}{|\zeta - \xi_i|^2} = 0 \quad i.e. \quad \zeta \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{|\zeta - \xi_i|^2} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{|\zeta - \xi_i|^2} \xi_i.$$

Dans le cas où les racines sont toutes réelles, le résultat s'obtient aussi en remarquant que chaque ξ_i est une racine de P' de multiplicité $m_i - 1$ et en appliquant le théorème de Rolle sur chaque intervalle $]\xi_i, \xi_{i+1}[$, on obtient $r - 1$ autres racines et on a bien $n - 1$ racines, toutes comprises entre ξ_1 et ξ_r.

Pour trouver les autres racines. —
Tout d'abord, pour trouver un $x_0 > \xi_r$, on commence par écrire $P = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}$ alors, si $P(\xi) = 0$, on a $|\xi|^n = \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^{n-i} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \, |\xi|^{n-i}$ et si $|\xi| \geq 1$, on a donc $|\xi| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$. D'où

$$|\xi_r| \leq \max \left(1; \sum_{i=1}^{n} |a_i| \right).$$

Par ailleurs, il est conseillé de diviser P par le pgcd de P et P' de sorte que ξ_r soit une racine simple ce qui donne une convergence plus rapide. Pour trouver les autres racines, on applique la méthode de Newton à $\frac{P(x)}{x - \xi_r}$ *i.e.* on considère la suite définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n) - \frac{P(x_n)}{x_n - \xi_r}}.$$

Référence

A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 2*, Dunod, 1999.

DÉVELOPPEMENT 23

FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Théorème (Formule sommatoire de Poisson). — *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle qu'il existe $M > 0$ et $\alpha > 1$ avec $|f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(m)| < \infty$ alors*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m) = 2\pi \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(2\pi m).$$

Démonstration. — Si $|x| \leq A$ et $|m| \geq A$ alors $|x + 2\pi m| \geq 2\pi |m| - |x| \geq |m|$ donc

$$|f(x + 2\pi m)| \leq \frac{M}{(1+m)^\alpha}$$

donc (cette série étant normalement convergente sur les compacts) on définit une fonction continue 2π-périodique en posant

$$\varphi(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi m).$$

Calculons le coefficient de Fourier de φ d'indice m :

$$c_m(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x + 2k\pi) e^{-imx} dx$$

et la convergence uniforme sur les compacts de la série permet d'écrire

$$c_m(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(x + 2k\pi) e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(y) e^{-imy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-imy} dy$$

i.e.

$$c_m(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(m).$$

Mais par hypothèse

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m(\varphi)| = \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(m)| < +\infty$$

or une fonction continue dont la série de Fourier converge normalement peut être développée en série de Fourier d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m) e^{imx}$$

i.e.

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m) e^{imx}$$

et pour $x = 0$, on obtient bien le résultat annoncé. $\square$

Exemple. — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-ax^2} = e^{-\frac{(\sqrt{2a}x)^2}{2}}\ ,\ a > 0.$$

On a alors

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\sqrt{2a}x)^2}{2}} e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-i\frac{\xi}{\sqrt{2a}}u} du$$

or si $G(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$ alors

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \widehat{G}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a}}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2a}} G\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a}}\right)$$

i.e.

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

On peut donc appliquer la formule de Poisson, de sorte que

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{m^2}{4a}} = 2\pi \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-4a\pi^2 m^2}.$$

En particulier, si $\theta(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t m^2}$ pour $t > 0$ alors

$$\theta(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t m^2} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-4a\pi^2 m^2}$$

où $a = \frac{t}{4\pi}$, d'où

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{m^2}{4a}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4\pi^2}{t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi m^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

Leçons concernées

39 Transformation de Fourier et produit de convolution
40 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples
41 Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries
46 Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications

Références

A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse 1*, Masson, 2è éd., 1997.
X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.
C. Zuily et H. Queffélec, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson, 1995.

DÉVELOPPEMENT 24

THÉORÈME DE REPRÉSENTATION CONFORME

Théorème. — *Si Ω est un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$, distinct de $\mathbb{C}$, alors il existe un biholomorphisme $f : \Omega \to \Delta$ (où Δ est le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$).*

Restriction du problème. —
Soit $z_0 \in \Omega$ et $a \in \mathbb{C}\backslash\Omega$. Puisque l'application $z \mapsto z-a$ est holomorphe sur Ω et puisque Ω est simplement connexe, il existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $e^{g(z)} = z - a$ pour tout $z \in \Omega$; cette fonction g est clairement injective. Le théorème de l'application ouverte montre qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{D(g(z_0), \varepsilon)} \subset g(\Omega)$ donc $D(g(z_0) + 2i\pi, \varepsilon) \cap g(\Omega) = \emptyset$ et il s'ensuit que $|g(z) - (g(z_0) + 2i\pi)| > \varepsilon$. Donc la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{g(z) - g(z_0) - 2i\pi}$$

est holomorphe, injective et bornée sur Ω. Par conséquent, il existe un biholomorphisme de Ω sur un ouvert borné de $\mathbb{C}$. Quitte à composer par une translation puis une homothétie, on peut donc supposer que $\Omega \subset \Delta$ et que Ω contient 0. $\square$

Existence d'une "bonne" dilatation. —
On note :
– $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions holomorphes injectives $f : \Omega \to \Delta$ telles que $f(0) = 0$,
– $\mathcal{B}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{A}$ telles que $|f'(0)| \geq 1$.
Puisque $\mathcal{B}$ contient l'identité, $\mathcal{B}$ n'est pas vide. De plus, il s'agit d'un ensemble borné de $\mathcal{H}(\Omega)$ puisque $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \Omega$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{B}$ tendant vers une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pour tout n, on a $f_n(0) = 0$ et $|f_n'(0)| \geq 1$ d'où $f(0) = 0$ et $|f'(0)| \geq 1$; en particulier f n'est pas constante. Pour tout $z \in \Delta$, on a $|f_n(z)| < 1$ donc $|f(z)| \leq 1$ mais si $|f(z)| = 1$ pour $z \in \Delta$ alors le principe du maximum montre que f est constante ; il s'ensuit que $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \Delta$. Enfin, d'après le théorème de Hurwitz, le fait que les f_n soient injectives implique que f est injective. Finalement, on a $f \in \mathcal{B}$ *i.e.* $\mathcal{B}$ est fermé. D'après le théorème de Montel, $\mathcal{B}$ est un compact de $\mathcal{H}(\Omega)$. Puisque l'application $\Phi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}, g \mapsto |g'(0)|$ est continue, il existe $f \in \mathcal{B}$ tel que $\Phi(f)$ soit maximal. Alors $|f'(0)|$ est *a fortiori* maximal parmi les $|g'(0)|$ tels que $g \in \mathcal{A}$. $\square$

Conclusion. — Supposons que f ne soit pas surjective alors il existe $a \in \Delta$ tel que $a \notin f(\Omega)$. Puisque Ω est simplement connexe, il existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que pour $z \in \Omega$

$$e^{F(z)} = \frac{f(z) - a}{1 - \overline{a}f(z)}.$$

Puisque $\zeta \mapsto \frac{\zeta - a}{1 - \overline{a}\zeta}$ est un biholomorphisme du disque et puisque f est à valeurs dans Δ, l'application F est une fonction holomorphe de Ω dans le demi-plan $\{\zeta ; \mathrm{Re}\, \zeta < 0\}$ qui est injective. On pose alors pour tout $z \in \Omega$

$$g(z) = \frac{F(z) - F(0)}{F(z) + \overline{F(0)}}.$$

Alors g est une fonction holomorphe et injective dans Ω vérifiant $g(0) = 0$. De plus, on a $|g(z)| < 1$ pour tout $z \in \Omega$ puisque $\left|\frac{v-u}{v+\overline{u}}\right| < 1$ pour tous $u, v \in \mathbb{C}$ de partie réelle < 0. Donc $g \in \mathcal{A}$.

Enfin, on a $g'(0) = \frac{F'(0)}{F(0)+\overline{F(0)}}$ or $F'(0) = (\overline{a} - \frac{1}{a})f'(0)$ d'où

$$\left|g'(0)\right| = \frac{1 - a\overline{a}}{2\,|a| \log\left|\frac{1}{a}\right|}\left|f'(0)\right| > \left|f'(0)\right|$$

puisque $\frac{1-t^2}{t} - 2\log\frac{1}{t} > 0$ pour tout $0 < t < 1$. □

Leçons concernées

03 Utilisation de la notion de compacité

04 Connexité. Exemples et applications

19 Problèmes d'extremum

44 Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications

45 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$

Compléments

Les calculs...—

• Soit $u, v \in \mathbb{C}$ avec Re $u < 0$ et Re $v < 0$, alors

$$\left|\frac{v-u}{v+\overline{u}}\right| < 1 \iff |v-u|^2 < |v+\overline{u}|^2 \iff (v-u)(\overline{v}-\overline{u}) < (v+\overline{u})(\overline{v}+u)$$

mais $(v+\overline{u})(\overline{v}+u) - (v-u)(\overline{v}-\overline{u}) = vu + \overline{uv} + v\overline{u} + u\overline{v} = 4\mathrm{Re}\,(u)\mathrm{Re}\,(v)$ d'où

$$\left|\frac{v-u}{v+\overline{u}}\right| < 1 \iff \mathrm{Re}\,(u)\mathrm{Re}\,(v) > 0$$

ce qui est assuré par le fait que Re u et Re v sont de même signe.

• On a $g(z) = \frac{F(z)-F(0)}{F(z)+\overline{F(0)}}$ d'où

$$g'(z) = \frac{F'(z)(F(z)+\overline{F(0)}) - F'(z)(F(z)-F(0))}{(F(z)+\overline{F(0)})^2} = \frac{F'(z)(F(0)+\overline{F(0)})}{(F(z)+\overline{F(0)})^2}$$

donc

$$g'(0) = \frac{F'(0)(F(0)+\overline{F(0)})}{(F(0)+\overline{F(0)})^2} = \frac{F'(0)}{F(0)+\overline{F(0)}}.$$

D'autre part, on a $e^{F(z)} = \frac{f(z)-a}{1-\overline{a}f(z)}$ d'où

$$F'(z)e^{F(z)} = \frac{f'(z)(1-\overline{a}f(z)) + \overline{a}f'(z)(f(z)-a)}{(1-\overline{a}f(z))^2}$$

i.e.

$$F'(z) = \frac{f'(z)(1-a\overline{a})}{(f(z)-a)(1-\overline{a}f(z))}$$

donc puisque $f(0) = 0$

$$F'(0) = \frac{f'(0)(1-a\overline{a})}{(f(0)-a)(1-\overline{a}f(0))} = -f'(0)(\frac{1}{a} - \overline{a}).$$

On a donc

$$g'(0) = \frac{F'(0)}{F(0)+\overline{F(0)}} = \frac{\overline{a} - \frac{1}{a}}{2\mathrm{Re}\;F(0)}f'(0)$$

or Re $F(0) = $ Re $(\log(-a)) = \log|a| = -\log\frac{1}{|a|}$ d'où

$$g'(0) = \frac{\frac{1}{a} - \overline{a}}{2\log\frac{1}{|a|}}f'(0) = \frac{1-|a|^2}{2a\log\frac{1}{|a|}}f'(0)$$

donc
$$\left|g'(0)\right| = \frac{1-|a|^2}{2\,|a|\log\frac{1}{|a|}}\left|f'(0)\right|.$$

• Posons $\varphi(t) = \frac{1-t^2}{t} - 2\log\frac{1}{t}$ alors $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} - 1 - 2\frac{-1/t^2}{1/t} = -\left(1+\frac{1}{t}\right)^2 < 0$ *i.e.* φ décroît sur $]0,1[$ mais $\varphi(1) = 0$ donc $\varphi(t) > 0$ pour tout $0 < t < 1$.

Biholomorphismes du disque. —

Proposition. — *Si $f : \Delta \to \Delta$ est un biholomorphisme alors il existe $a \in \Delta$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que*
$$f(z) = e^{i\theta} g_a(z) \ \text{où}\ g_a(z) = \frac{z-a}{\overline{a}z-1}.$$

Démonstration. — Montrons tout d'abord que g_a est un biholomorphisme du disque. On a
$$\left|\frac{z-a}{\overline{a}z-1}\right| < 1 \iff |z-a|^2 < |\overline{a}z-1|^2 \iff (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) < (\overline{a}z-1)(a\overline{z}-1)$$
i.e.
$$\left|\frac{z-a}{\overline{a}z-1}\right| < 1 \iff z\overline{z} - a\overline{z} - z\overline{a} + a\overline{a} < \overline{a}za\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} + 1 \iff z\overline{z} + a\overline{a} < \overline{a}za\overline{z} + 1$$
donc
$$\left|\frac{z-a}{\overline{a}z-1}\right| < 1 \iff z\overline{z} - \overline{a}za\overline{z} < 1 - a\overline{a} \iff z\overline{z}(1-a\overline{a}) < 1 - a\overline{a} \iff z\overline{z} < 1.$$
Donc g_a est à valeurs dans Δ. D'autre part, on a
$$\omega = \frac{z-a}{\overline{a}z-1} \iff \overline{a}z\omega - \omega = z - a \iff z(1-\overline{a}\omega) = a - \omega \iff z = \frac{\omega-a}{\overline{a}\omega-1}$$
i.e. $g_a \circ g_a = \mathrm{Id}_\Delta$ et il s'ensuit que $g_a \in \mathrm{Aut}(\Delta)$.

Soit $f : \Delta \to \Delta$ un biholomorphisme, on note $a = f^{-1}(0)$ et $h = f \circ g_a$ alors h est un biholomorphisme (comme composée de biholomorphismes) et vérifie $h(0) = 0$. D'après le lemme de Schwarz, on a donc $|h(z)| \leq |z|$ et $\left|h^{-1}(z)\right| \leq |z|$ pour tout $z \in \Delta$; en particulier, il s'ensuit que $|h'(0)| \leq 1$ et $\left|(h^{-1})'(0)\right| \leq 1$. Or on a $h \circ h^{-1} = \mathrm{Id}_\Delta$ donc $h'(h^{-1}(0))(h^{-1})'(0) = 1$ *i.e.* $h'(0)(h^{-1})'(0) = 1$ d'où $|h'(0)|\left|(h^{-1})'(0)\right| = 1$. Il s'ensuit que $|h'(0)| = 1$ donc, toujours d'après le lemme de Schwarz, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $h(z) = e^{i\theta}z$ pour tout $z \in \Delta$. Donc $f(z) = f \circ g_a(g_a(z)) = h(g_a(z)) = e^{i\theta} g_a(z)$. □

Existence d'une détermination du Log sur un domaine simplement connexe. —

Proposition. — *Si Ω est simplement connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ne s'annule pas alors il existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f(z) = e^{g(z)}$ pour tout $z \in \Omega$.*

Démonstration. — Soit $z_0 \in \Omega$, puisque Ω est simplement connexe, il est cohérent de définir une fonction holomorphe g en posant pour tout $z \in \Omega$
$$g(z) = \int_{[z_0,z]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta.$$
Alors
$$\frac{d}{dz}\left(f(z)e^{-g(z)}\right) = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)g'(z)e^{-g(z)} = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)\frac{f'(z)}{f(z)}e^{-g(z)} = 0$$
donc il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $f(z)e^{-g(z)} = e^c$ pour tout $z \in \Omega$ *i.e.* $f(z) = e^{g(z)+c}$ pour tout $z \in \Omega$. □

Sur l'unicité du biholomorphisme. —

Théorème. — *Si $\Omega \neq \mathbb{C}$ est simplement connexe alors il y a unicité du biholomorphisme $f : \Omega \to \Delta$ tel que $f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$.*

Démonstration. — Si f et g sont deux tels biholomorphismes alors $h = f \circ g^{-1}$ est un biholomorphisme de Δ sur Δ donc il existe $a \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $h(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ pour tout $z \in \Delta$. Mais on a $h(0) = 0$ donc $e^{i\theta}\frac{-a}{-1} = 0$ *i.e.* $a = 0$ donc $h(z) = -e^{i\theta}z$ pour tout $z \in \Delta$. Enfin, on a $h'(z) = f'(g^{-1}(z))(g^{-1})'(z)$ donc $h'(0) = f'(g^{-1}(0))(g^{-1})'(0) = \frac{f'(0)}{g'(0)}$ *i.e.* $-e^{i\theta} > 0$ donc $\theta = \pi$ et on a finalement $h(z) = z$ pour tout $z \in \Delta$, d'où $f = g$. □

Sur le problème d'extremum. —
On a vu que si $\Omega \subset \Delta$ est simplement connexe et si $f : \Omega \to \Delta$ est holomorphe injective avec $f(0) = 0$ et telle que $|f'(0)|$ soit maximal parmi les fonctions de ce type, alors f est surjective ; la réciproque est aussi vraie. Considérons un biholomorphisme $g : \Omega \to \Delta$ et une fonction $f : \Omega \to \Delta$ holomorphe avec $g(0) = f(0) = 0$, on pose $h = g^{-1} \circ f$ alors $h(0) = 0$ donc, d'après le lemme de Schwarz, on a $|h'(0)| \leq 1$ pour tout $z \in \Delta$. Or $h'(0) = (g^{-1})'(f(0))f'(0) = \frac{f'(0)}{g'(0)}$ d'où $|f'(0)| \leq |g'(0)|$.

Les biholomorphismes de $\mathbb{C}$. —
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un biholomorphisme alors $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est de rayon de convergence infini donc la fonction h définie pour $z \neq 0$ par $h(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{z^n}$ est holomorphe sur $\Delta \setminus \{0\}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $z_0 \in \Delta$ tels que $D(z_0, \rho) \cap D(0, \varepsilon) = \emptyset$. D'après le théorème de l'application ouverte, $h(D(z_0, \rho))$ est un ouvert non vide de l'image de h or h est injective (comme composée de fonctions injectives) donc $h(D(0, \varepsilon) \setminus \{0\})$ ne peut pas être dense dans $\mathbb{C}$ *i.e.* d'après le théorème de Casorati-Weierstrass, h n'a pas une singularité essentielle en 0. Donc on a $a_n = 0$ pour n assez grand *i.e.* f est un polynôme. Puisque f est injective, il s'agit d'un polynôme de degré exactement 1 *i.e.* il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = az + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Les biholomorphismes du disque sur le carré. —
Soit f un biholomorphisme de Δ sur le carré unité C qui fixe 0. On note r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et on pose $g = f^{-1} \circ r \circ f$ alors $g(\Delta) \subset \Delta$ puisque le carré est invariant par cette rotation. De plus $g(0) = 0$ et un calcul rapide donne $g'(0) = (f^{-1})'(0)r'(0)f'(0) = i$, le lemme de Schwarz donne donc $g(z) = iz$ pour tout $z \in \Delta$. On a donc $f(iz) = if(z)$ pour tout $z \in \Delta$.

Référence

H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1985.

Sébastien Pellerin

DÉVELOPPEMENT 25

FORMES LINÉAIRES ET CONNEXITÉ

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et ϕ une forme linéaire sur E, on pose $H = \ker \phi$.

Proposition. — *ϕ est continue si et seulement si $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.*

Démonstration. — Si ϕ est continue alors $E \setminus H$ est la réunion disjointe des deux ouverts

$$\{x \in E; \phi(x) > 0\} \quad \text{et} \quad \{x \in E; \phi(x) < 0\}$$

donc $E \setminus H$ n'est pas connexe.

Réciproquement, supposons que ϕ ne soit pas continue. Puisque les ensembles $\{x \in E; \phi(x) > 0\}$ et $\{x \in E; \phi(x) < 0\}$ sont convexes, il s'agit de parties connexes par arcs donc il suffit de construire un chemin continu entre $a \in E$ tel que $\phi(a) = 1$ et $-a$. Le fait que ϕ ne soit pas continue si traduit par

$$\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall \alpha > 0 \ , \ \exists x \in E \ / \ \|x\| < \alpha \ \text{ et } \ \phi(x) > \varepsilon.$$

Posons $x_0 = a$ alors (pour $\alpha = \frac{\varepsilon\|x_0\|}{2}$), on a

$$\exists \widetilde{x_1} \in E \ / \ \|\widetilde{x_1}\| < \frac{\varepsilon \|x_0\|}{2} \quad \text{et} \quad \phi(\widetilde{x_1}) > \varepsilon$$

puis on pose

$$x_1 = \frac{1}{\phi(\widetilde{x_1})}\widetilde{x_1}$$

de sorte que $\phi(x_1) = 1$ et

$$\|x_1\| = \frac{1}{\phi(\widetilde{x_1})} \|\widetilde{x_1}\| < \frac{1}{\varepsilon} \|\widetilde{x_1}\| < \frac{1}{\varepsilon}\frac{\varepsilon \|x_0\|}{2} = \frac{\|x_0\|}{2}.$$

En réitérant le procédé, on construit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de E vérifiant pour tout $n \geq 0$

$$\phi(x_n) = 1 \ , \ \|x_{n+1}\| < \|x_n\| \quad \text{et} \quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par ailleurs, on a $E = H \oplus \mathbb{R}a$ donc, pour tout $n \geq 0$, on peut écrire $x_n = h_n + \lambda_n a$ avec $h_n \in H$ et $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Mais on a $\phi(x_n) = \phi(a) = 1$ et $\phi(h_n) = 0$ donc $\lambda_n = 1$ *i.e.* $x_n = h_n + a$ pour tout $n \geq 0$.

On peut donc considérer une application $f :]0, \|x_0\|] \to E$ en posant

$$\forall t \in] \|x_{n+1}\| , \|x_n\|] \ , \ f(t) = \frac{1}{\|x_{n+1}\| - \|x_n\|} \left((\|x_{n+1}\| - t)(x_n + h_n) + (t - \|x_n\|)(x_{n+1} + h_{n+1})\right)$$

et cette application est continue sur $]0, \|x_0\|]$ puisque $f(\|x_n\|) = x_n + h_n$ et f est affine par morceaux.

Pour tout $t \in] \|x_{n+1}\| , \|x_n\|]$, on a

$$\begin{aligned} \phi(f(t)) &= \frac{1}{\|x_{n+1}\| - \|x_n\|} \left((\|x_{n+1}\| - t)\phi(x_n + h_n) + (t - \|x_n\|)\phi(x_{n+1} + h_{n+1})\right) \\ &= \frac{1}{\|x_{n+1}\| - \|x_n\|} \left((\|x_{n+1}\| - t) + (t - \|x_n\|)\right) = 1 \end{aligned}$$

donc f est un chemin continu dans $E \setminus H$.

Enfin, pour tout $t \in]\,\|x_{n+1}\|\,,\|x_n\|]$, on a

$$\begin{aligned} f(t)+a &= f(t) + \frac{a(\|x_{n+1}\|-t)+a(t-\|x_n\|)}{\|x_{n+1}\|-\|x_n\|} \\ &= \frac{1}{\|x_{n+1}\|-\|x_n\|}\left((\|x_{n+1}\|-t)(x_n+h_n+a)+(t-\|x_n\|)(x_{n+1}+h_{n+1}+a)\right) \\ &= \frac{2}{\|x_{n+1}\|-\|x_n\|}\left((\|x_{n+1}\|-t)x_n+(t-\|x_n\|)x_{n+1}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\|f(t)+a\| \leq \frac{2}{\|x_n\|-\|x_{n+1}\|}\left((t-\|x_{n+1}\|)\,\|x_n\|+(\|x_n\|-t)\,\|x_{n+1}\|\right) = 2t$$

et il s'ensuit que

$$f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} -a.$$

Ainsi, quitte à prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0)=-a$, on a bien construit un chemin continu dans $E \setminus H$ d'extrémités $-a$ et $f(\|x_0\|) = x_0 + h_0 = a$. $\square$

Leçons concernées

04 Connexité. Exemples et applications

10 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications

DÉVELOPPEMENT 26

SOUS-GROUPES COMPACTS DE $GL_n(\mathbb{R})$

Proposition. — *Soit E un espace euclidien de dimension N et H un sous-groupe compact de $GL(E)$. Si K est un convexe compact de E tel que $u(K) \subset K$ pour tout $u \in H$, alors il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$ pour tout $u \in H$.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que $\bigcap_{u \in H} \{x \in K; u(x) = x\} \neq \emptyset$ donc, puisque K est compact et puisque $\{x \in K; u(x) = x\}$ est fermé pour tout $u \in H$, il s'agit de montrer que si $u_1, \dots, u_p \in H$ alors $\bigcap_{i=1}^{p} \{x \in K; u_i(x) = x\} \neq \emptyset$.

On pose $v = \frac{1}{p}(u_1 + \cdots + u_p)$ alors on a $v(K) \subset K$ par convexité et puisque $u_i(K) \subset K$ pour tout $1 \leq i \leq p$. Si $x_0 \in K$ est fixé, on note $x_k = \frac{1}{k}(x_0 + v(x_0) + \cdots + v^{[k-1]}(x_0))$ alors

$$v(x_k) = \frac{1}{k}\left(v(x_0) + v^{[2]}(x_0) + \cdots + v^{[k]}(x_0)\right) = x_k - \frac{1}{k}x_0 + \frac{1}{k}v^{[k]}(x_0).$$

Puisque la suite $(x_k)_k$ est à valeurs dans le compact K, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(k)})_k$ qui converge vers un élément $a \in K$. On a alors

$$\left\|v(x_{\varphi(k)}) - x_{\varphi(k)}\right\| = \frac{1}{k}\left\|x_0 - v^{[k]}(x_0)\right\| \leq \frac{1}{k}\operatorname{diam}(K) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

or $x_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} a$ et v est continue d'où $v(a) = a$.

Si $x \in K$ est fixé alors $u \in H \mapsto \|u(x)\|$ est continue sur le compact H donc on peut poser

$$\|x\|' = \sup_{u \in H} \|u(x)\|.$$

Les relations $\|\lambda x\|' = |\lambda| \|x\|'$ et $\|x + y\|' \leq \|x\|' + \|y\|'$ sont claires et si $\|x\|' = 0$ alors $u(x) = 0$ (*i.e.* $x \in \ker u$) pour tout $u \in H$ mais $H \subset GL(\mathbb{R}^N)$ donc $x = 0$. Donc $\| \ \|'$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$. Qui plus est, pour tout $f \in H$, on a

$$\|x\|' = \sup_{u \in H} \|u(x)\| = \sup_{(u \circ f) \in H} \|u \circ f(x)\| = \sup_{u \in H} \|u(f(x))\| = \|f(x)\|'.$$

D'autre part, on peut supposer que la norme $\| \ \|$ est la norme euclidienne. Si $\|x + y\|' = \|x\|' + \|y\|'$ alors il existe $u_0 \in H$ tel que $\|x + y\|' = \|u_0(x + y)\| = \|u_0(x) + u_0(y)\|$ (en effet, le sup est atteint en un certain $u_0 \in H$) or

$$\begin{aligned}\|x + y\|'^2 = \|u_0(x) + u_0(y)\|^2 = \|u_0(x)\|^2 + \|u_0(y)\|^2 + 2\|u_0(x)\|\|u_0(y)\| \\ \leq \|x\|'^2 + \|y\|'^2 + 2\|u_0(x)\|\|u_0(y)\|\end{aligned}$$

d'où

$$\|u_0(x)\|^2 + \|u_0(y)\|^2 + 2\langle u_0(x), u_0(y)\rangle = \|u_0(x)\|^2 + \|u_0(y)\|^2 + 2\|u_0(x)\|\|u_0(y)\|$$

i.e. $\langle u_0(x), u_0(y)\rangle = \|u_0(x)\|\|u_0(y)\|$ donc il existe $\lambda \geq 0$ tel que $u_0(x) = \lambda u_0(y)$ ou $u_0(y) = \lambda u_0(x)$. En composant par u_0^{-1}, on a $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

• Puisque $v(a) = a$, on a

$$\|a\|' = \|v(a)\|' = \frac{1}{p}\left\|\sum_{k=1}^{p-1} u_k(a) + u_p(a)\right\|' \leq \frac{1}{p}\left\|\sum_{k=1}^{p-1} u_k(a)\right\|' + \frac{1}{p}\|u_p(a)\|' \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\|u_k(a)\|' = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\|a\|' = \|a\|'$$

d'où

$$\frac{1}{p}\left\|\sum_{k=1}^{p-1} u_k(a) + u_p(a)\right\|' = \frac{1}{p}\left\|\sum_{k=1}^{p-1} u_k(a)\right\|' + \frac{1}{p}\|u_p(a)\|'$$

et d'après le point précédent, il existe $\lambda_p \geq 0$ tel que

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} u_k(a) = \lambda_p \frac{1}{p} u_p(a) \quad \text{ou} \quad \lambda_p \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} u_k(a) = \frac{1}{p} u_p(a).$$

Le cas où $\lambda_p = 0$ correspond à $a = 0$ donc a est alors clairement un point fixe commun aux u_i puisque ce sont des isomorphismes. On peut donc supposer qu'il existe $\lambda_p > 0$ tel que

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} u_k(a) = \lambda_p \frac{1}{p} u_p(a)$$

puis (en substituant ci-dessus)

$$\frac{\lambda_p + 1}{p}\|u_p(a)\|' = \frac{1}{p}\|\lambda_p u_p(a)\|' + \frac{1}{p}\|u_p(a)\|' = \|a\|'$$

or $\|u_p(a)\|' = \|a\|'$ donc $\lambda_p = p - 1$, d'où

$$v(a) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} u_k(a) + \frac{1}{p} u_p(a) = \frac{1}{p}\lambda_p u_p(a) + \frac{1}{p} u_p(a) = u_p(a).$$

Ce qui a été montré pour l'indice p peut en fait être fait pour n'importe quel indice $1 \leq i \leq p$ donc on a en fait $u_i(a) = v(a) = a$ pour tout $1 \leq i \leq n$. En particulier, on a bien $\bigcap_{i=1}^{p}\{x \in K; u_i(x) = x\} \neq \emptyset$. □

Proposition. — *Si G est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $PGP^{-1} \subset \mathcal{O}(n)$.*

Démonstration. — • On considère l'application $\rho : G \to GL(\mathrm{Sym}_n), A \mapsto \rho_A$ où $\rho_A(S) = {}^tASA$. Cette application est bien définie puisque ${}^tASA \in \mathrm{Sym}_n$ lorsque $S \in \mathrm{Sym}_n$ et ρ_A est inversible (d'inverse $\rho_{A^{-1}}$). L'application ρ est la composée de l'application $A \mapsto (A, A)$ et de l'application bilinéaire $(A, B) \mapsto (S \mapsto {}^tASB)$ donc ρ est continue.

• Puisque ρ est continue sur le compact G, le groupe $H = \rho(G)$ est compact. D'autre part, l'ensemble $\mathcal{E} = \{{}^tMM; M \in G\}$ est compact donc (d'après le théorème de Carathéodory), son enveloppe convexe K est compacte. Les éléments de $\mathcal{E}$ sont des matrices symétriques définies positives (puisque ${}^tMM$ est symétrique et, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, on a MX non nul, d'où ${}^tX({}^tMM)X = {}^t(MX)MX = \|MX\|^2 > 0$) or Sym_n^{++} est convexe donc $K \subset \mathrm{Sym}_n^{++}$. Enfin, si $B \in K$, alors il existe $\alpha \in [0, 1]$, ${}^tMM \in \mathcal{E}$ et ${}^tNN \in \mathcal{E}$ tels que $B = \alpha\, {}^tMM + (1-\alpha)\, {}^tNN$; considérons un élément $u \in H$, on a $u = \rho_A$ pour un certain $A \in G$, d'où

$$\begin{aligned} u(B) &= \alpha u({}^tMM) + (1-\alpha)u({}^tNN) = \alpha\rho_A({}^tMM) + (1-\alpha)\rho_A({}^tNN) \\ &= \alpha\, {}^tA({}^tMM)A + (1-\alpha)\, {}^tA({}^tNN)A = \alpha\, {}^t(MA)MA + (1-\alpha)\, {}^t(NA)NA \end{aligned}$$

or $A \in G$ donc $MA, NA \in G$ donc $u(B) \in K$. On a donc montré que H est un sous-groupe compact de $GL(\mathbb{R}^N)$ (où N est la dimension de Sym_n^{++}) et K est un compact convexe de $\mathrm{Sym}_n^{++} \simeq \mathbb{R}^N$ qui est stable par tous les éléments de H. D'après la proposition précédente, il existe $S \in K$ tel que $u(S) = S$ pout tout $u \in H$ *i.e.* $\rho_A(S) = S$ pour tout $A \in G$, ce qui signifie que ${}^tASA = S$ pour tout $A \in G$.

• Enfin, la matrice $S \in K$ est symétrique définie positive donc il en est de même de la matrice S^{-1} ; il s'ensuit que S^{-1} admet une racine carrée symétrique définie positive *i.e.* il existe une matrice R symétrique définie positive telle que $S = R^2 = {}^tRR$. Pour tout $A \in G$, la relation ${}^tASA = S$ s'écrit donc ${}^tA\, {}^tRRA = {}^tRR$ *i.e.* ${}^tR^{-1}\, {}^tA\, {}^tRRAR^{-1} = \mathrm{I}_n$ d'où ${}^t(RAR^{-1})RAR^{-1} = \mathrm{I}_n$ *i.e.* $RAR^{-1} \in \mathcal{O}(n)$. □

Sébastien Pellerin

Leçons concernées

03 Utilisation de la notion de compacité
06 Utilisation de théorèmes de point fixe
11 Utilisation de la dimension finie en analyse

Référence

M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

DÉVELOPPEMENT 27

ÉTUDE DE LA SÉRIE $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^\alpha}$

On pose $a_n = \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^\alpha}$ alors $|a_n| = \frac{1}{n^\alpha}$ donc cette série converge absolument pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 0$. On suppose désormais que $0 < \alpha \leq 1$.

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$b_n = a_{n^2} + \cdots + a_{(n+1)^2-1} = (-1)^n \beta_n \text{ où } \beta_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k^\alpha}.$$

La décroissance sur $]0, +\infty[$ de l'application $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ montre que

$$\frac{2n+1}{(n+1)^{2\alpha}} \leq \beta_n \leq \frac{2n+1}{n^{2\alpha}}$$

et il s'ensuit que β_n ne tend pas vers 0 pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Donc la série $\sum b_n$ diverge et le théorème de sommation par tranches assure que la série $\sum a_n$ est alors aussi divergente.

On suppose maintenant que $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. L'encadrement de β_n ci-dessus montre que β_n tend vers 0. D'autre part, la décroissance sur $]0, +\infty[$ de l'application $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ donne $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ d'où

$$\beta_n \geq \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{dt}{t^\alpha} = I_n \quad \text{et} \quad \beta_{n+1} \leq \int_{(n+1)^2-1}^{(n+2)^2-1} \frac{dt}{t^\alpha} = J_{n+1}$$

d'où

$$\beta_n - \beta_{n+1} \geq I_n - J_{n+1}.$$

Pour $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, on a

$$I_n = \frac{n^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha} \left(\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{1-\alpha} - 1 \right)$$

et

$$J_{n+1} = \frac{n^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha} \left(\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}\right)^{1-\alpha} - \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1-\alpha} \right)$$

d'où

$$I_n - J_{n+1} = \frac{4\alpha - 2}{n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\right)$$

au voisinage de $+\infty$. Donc la série $\sum b_n$ converge.

Pour $\alpha = 1$, il existe $N \geq 1$ tel que $I_n - J_{n+1} \geq 0$ dès que $n \geq N$ et on a *a fortiori* $\beta_n \geq \beta_{n+1}$. Donc la série $\sum b_n$ converge d'après le théorème des séries alternées.

Dans les deux cas, la série somme par tranches converge et a_n est de signe constant sur chaque tranche. Donc la série $\sum a_n$ converge pour $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Leçon concernée

30 Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques

Référence

E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux *Exercices d'analyse 2*, Masson, 1993.

DÉVELOPPEMENT 28

THÉORÈME TAUBÉRIEN FORT

Théorème taubérien d'Hardy-Littlewood. — *Si $(a_n)_n$ est une suite réelle avec $a_n = O(\frac{1}{n})$, telle que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence ≥ 1 et que sa somme vérifie $\lim_{x\to 1^-} F(x) = \ell$ alors la série $\sum a_n$ converge et sa somme vaut ℓ.*

Démonstration. — Quitte à considérer la suite $(b_n)_n$ définie par $b_0 = a_0 - \ell$ et $b_n = a_n$ pour tout $n \geq 1$, on peut supposer que $\ell = 0$. On considère alors l'ensemble Θ des applications $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que

$$\sum_{n\geq 0} a_n \theta(x^n) \text{ converge pour } 0 \leq x < 1 \text{ et } \lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 0} a_n \theta(x^n) = 0.$$

L'hypothèse sur la série $\sum a_n x^n$ assure que les polynômes sont dans Θ.

• On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = 0$ pour $0 \leq t < \frac{1}{2}$ et par $g(t) = 1$ pour $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Si $0 \leq x < 1$ alors on a $0 \leq x^n < \frac{1}{2}$ dès que $n > -\frac{\log 2}{\log x}$ et il s'ensuit en notant N_x la partie entière de $-\frac{\log 2}{\log x}$ que : $\forall 0 \leq x < 1$, $\sum_{n\geq 0} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n$.

Si on montre que $g \in \Theta$ alors on aura bien la convergence de $\sum a_n$.

• On définit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $h(0) = -1$, $h(1) = 1$ et

$$h(t) = \frac{g(t) - t}{t(1-t)} \text{ pour } 0 < t < 1 \textit{ i.e. } h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t-1} & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{t} & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on considère s_1 et s_2 continues telles que $s_1 \leq h \leq s_2$ et $\int_0^1 (s_2(t) - s_1(t))dt < \varepsilon$ alors, d'après le théorème de Weierstrass, il existe t_1 et t_2 polynômiales sur $[0,1]$ telles que $|t_1 - s_1| < \varepsilon$ et $|t_2 - s_2| < \varepsilon$. Si on pose $u_1 = t_1 - \varepsilon$ et $u_2 = t_2 - \varepsilon$, on a alors $u_1 < s_1 \leq h \leq s_2 < u_2$ et

$$\int_0^1 (u_2(x) - u_1(x))dx \leq \int_0^1 (t_2(x) - t_1(x) + 2\varepsilon)dx \leq \int_0^1 (s_2(x) - s_1(x) + 4\varepsilon)dx < 5\varepsilon.$$

Les polynômes $p_1(x) = x + x(1-x)u_1(x)$ et $p_2(x) = x + x(1-x)u_2(x)$ vérifient $p_i(0) = 0$, $p_i(1) = 1$ et $p_1 \leq g \leq p_2$; il s'ensuit que le polynôme

$$q(x) = \frac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)} = u_2(x) - u_1(x) \text{ vérifie } \int_0^1 q(x)dx < 5\varepsilon.$$

• On a $g(x^n) = 0$ dès que $x^n < \frac{1}{2}$, donc la série $\sum a_n g(x^n)$ converge pour tout $x \in [0,1[$. Puisque $a_n = O(\frac{1}{n})$, il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leq \frac{M}{n}$ pour tout n, donc on a pour tout $x \in [0,1[$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n)\right| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,(p_2 - p_1)(x^n)\\ &\leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n} q(x^n)\\ &\leq M(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n)\end{aligned}$$

i.e.

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n)\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n)\right| + M(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n).$$

Comme $p_1 \in \Theta$, il existe $0 < \lambda < 1$ tel que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n) < \varepsilon$ donc

$$\forall x \in [\lambda, 1[, \quad \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n)\right| \leq \varepsilon + M(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n).$$

• Il suffit donc, pour conclure, de montrer que pour tout polynôme f, on a

$$(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n f(x^n) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \int_0^1 f(t)dt$$

et, par linéarité, on peut se limiter au cas où $f(t) = x^k$. Dans ce cas, on a pour tout $x \in [0,1[$

$$(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n f(x^n) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} (x^{k+1})^n = \frac{1-x}{1-x^{k+1}}$$

i.e.

$$(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n f(x^n) = \frac{1}{1+x+\cdots+x^k} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{1}{k+1}$$

et on a bien le résultat souhaité puisque $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^k dt.$ □

Leçons concernées

07 Prolongements de fonctions. Applications

23 Convergence des suites numériques. Exemples et applications

24a Comportement asymptotique des suites numériques. Exemples

27 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle.Exemples et contre-exemples

29 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples

34 Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications

40 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

47 Exemples de problèmes d'interversion de limites

48 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales ou polynômiales par morceaux. Exemples

Compléments

Un exercice classique. —

Proposition. — *Si* $(u_n)_n$ *est une suite positive décroissante telle que* $\sum u_n$ *converge alors* $u_n = o(\frac{1}{n})$.

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\sum u_n$ converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n < \varepsilon$ et comme la suite $(u_n)_n$ est décroissante, on a pour tout $p > N$

$$(p-N)u_p \leq u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_p \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n < \varepsilon.$$

Si $p > 2N$ alors $\frac{p}{2} < p - N$ donc $\frac{p}{2}u_p \leq \varepsilon$ *i.e.* $pu_p \leq 2\varepsilon$ et on obtient $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} pu_p = 0$. □

Le théorème taubérien faible. —

Proposition. — *Si* $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *est une série entière de rayon de convergence* 1 *telle que* $a_n = o(\frac{1}{n})$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = S$ *existe alors* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ *converge et* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n = S$.

Démonstration. — Pour tout $N \geq 0$, on pose $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ alors pour tout $x \in]0,1[$ et tout $N \geq 0$, on a

$$S_N - f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

or on a pour $0 < x < 1$

$$1 - x^n = (1-x)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) \leq n(1-x)$$

d'où

$$|S_N - f(x)| \leq \sum_{n=0}^{N} n\,|a_n|\,(1-x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n}{N}\,|a_n|\,x^n.$$

Puisque la suite $(ka_k)_k$ tend vers 0, on peut en considérer un majorant M, on obtient

$$|S_N - f(x)| \leq NM(1-x) + \frac{1}{N}\sup_{n>N} n\,|a_n| \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \leq NM(1-x) + \frac{1}{N(1-x)}\sup_{n>N} n\,|a_n|\,.$$

Soit $0 < \varepsilon < 1$, d'après ce qui précède, on a

$$\left|S_N - f(1 - \frac{\varepsilon}{N})\right| \leq M\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\sup_{n>N} n\,|a_n|$$

or la suite $(ka_k)_k$ tend vers 0 donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sup_{n>N_0} n\,|a_n| < \varepsilon^2$ d'où

$$\forall N \geq N_0\ ,\ \left|S_N - f(1-\frac{\varepsilon}{N})\right| \leq (M+1)\varepsilon.$$

Puisque $f(x)$ tend vers S lorsque x tend vers 1^-, il existe $N_1 \geq N_0$ tel que

$$\forall N \geq N_1\ ,\ \left|S - f(1-\frac{\varepsilon}{N})\right| \leq \varepsilon$$

d'où

$$\forall N \geq N_1\ ,\ |S - S_N| \leq \left|S - f(1-\frac{\varepsilon}{N})\right| + \left|S_N - f(1-\frac{\varepsilon}{N})\right| \leq (M+2)\varepsilon$$

i.e. S_N tend vers S quand N tend vers l'infini. □

Le théorème d'Abel non tangentiel. —

Proposition. — *Si* $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *est une série entière de rayon de convergence* ≥ 1 *telle que* $\sum a_n$ *converge. Pour* $0\leq\theta_0<\frac{\pi}{2}$*, on considère le secteur*

$$\Delta_{\theta_0}=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z|<1 \text{ et } \exists\rho>0, \exists\theta\in[-\theta_0,\theta_0]\ /\ z=1-\rho e^{i\theta}\}$$

alors $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n$.

Démonstration. — On note $S=\sum_{n\geq 0} a_n$ et $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Soit $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|<1$, on effectue la transformation d'Abel $a_n=R_{n-1}-R_n$, alors

$$f(z)-S=\sum_{n\geq 1} a_n(z^n-1)=\sum_{n\geq 1}(R_{n-1}-R_n)(z^n-1)=\sum_{n\geq 0} R_n(z^{n+1}-1)-\sum_{n\geq 1} R_n(z^n-1)$$

donc

$$f(z)-S=(z-1)\sum_{n\geq 0} R_n z^n.$$

Soit $\varepsilon>0$ et $N\in\mathbb{N}$ tel que $|R_n|<\varepsilon$ pour tout $n\geq N$ alors, pour tout $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|<1$, on a

$$|f(z)-S|\leq |z-1|\left|\sum_{n=0}^{N} R_n z^n\right|+\varepsilon\,|z-1|\sum_{n=N+1}^{+\infty}|z|^n\leq |z-1|\sum_{n=0}^{N}|R_n|+\varepsilon\frac{|z-1|}{1-|z|}$$

et il existe $\alpha>0$ tel que pour $|z-1|<\alpha$ on ait $|z-1|\sum_{n=0}^{N}|R_n|<\varepsilon$ *i.e.* pour $|z-1|<\alpha$ et $|z|<1$, on a

$$|f(z)-S|\leq\varepsilon\left(1+\frac{|z-1|}{1-|z|}\right).$$

Si $z\in\Delta_{\theta_0}$ alors $z=1-\rho e^{i\theta}$ avec $\rho>0$ et $-\theta_0\leq\theta\leq\theta_0$ donc $|z|^2=1-2\rho\cos\theta+\rho^2$, d'où (puisque $|z|<1$)

$$\frac{|z-1|}{1-|z|}=\frac{|z-1|\,(1+|z|)}{1-|z|^2}\leq\frac{2\,|z-1|}{1-|z|^2}=\frac{2\rho}{2\rho\cos\theta-\rho^2}=\frac{2}{2\cos\theta-\rho}$$

et pour $\rho\leq\cos\theta_0$ il vient

$$\frac{|z-1|}{1-|z|}\leq\frac{2}{2\cos\theta_0-\cos\theta_0}=\frac{2}{\cos\theta_0}.$$

Ainsi, si $z\in\Delta_{\theta_0}$ et si $|z-1|<\inf\{\alpha,\cos\theta_0\}$, on a

$$|f(z)-S|\leq\varepsilon\left(1+\frac{2}{\cos\theta_0}\right)$$

donc $f(z)$ tend vers $S=\sum_{n\geq 0} a_n$ quand z tend vers 1^-. □

Exemples. — On considère la série $\sum\frac{(-1)^n}{2n+1}$ alors

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\lim_{x\to 1^-}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n=\lim_{x\to 1^-}\arctan x=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

On considère la série $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ alors

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{x\to 1^-}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\lim_{x\to 1^-}\log(1+x)=\log 2.$$

Remarque. — Soit $(a_n)_n$ une suite de $\mathbb{C}$ et soit $(b_n)_n$ une suite d'applications d'un ensemble T dans $\mathbb{C}$. Si $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et s'il existe $c > 0$ avec

$$\sup_{t\in T}\sum_{n\geq 1}|b_n(t)-b_{n-1}(t)|\leq c \quad \text{et} \quad \sup_{n,t}|b_n(t)|\leq c$$

alors $\sum_{n\geq 0} a_n b_n(t)$ converge uniformément sur T.

En effet, posons $r_n = \sum_{j\geq n} a_j$, $S_n(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j b_j(t)$ et $\rho_n = \sup_{m\geq n}|r_m|$, alors pour $q > p \geq 0$ on a

$$S_q(t)-S_p(t) = \sum_{j=p+1}^{q} a_j b_j(t) = \sum_{j=p+1}^{q}(r_j - r_{j+1})b_j(t) = \sum_{j=p+1}^{q} r_j b_j(t) - \sum_{j=p+2}^{q+1} r_j b_{j-1}(t)$$

i.e.

$$S_q(t)-S_p(t) = \sum_{j=p+2}^{q} r_j(b_j(t)-b_{j-1}(t)) + r_{p+1}b_{p+1}(t) - r_{q+1}b_q(t)$$

d'où

$$|S_q(t)-S_p(t)| \leq \sum_{j=p+2}^{q}\rho_p\,|b_j(t)-b_{j-1}(t)| + \rho_p\,|b_{p+1}(t)| + \rho_p\,|b_q(t)| \leq 3c\rho_p$$

et il s'ensuit que pour $q > p \geq 0$ on a

$$\sup_{t\in T}|S_q(t)-S_p(t)|\leq 3c\rho_p$$

et comme $\rho_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, on a bien la convergence uniforme des S_n.

On en déduit une preuve rapide du théorème non tangentiel d'Abel. On pose $b_n(z) = z^n$ sur le secteur T et on considre $z = 1 - re^{i\theta}$. Si $r = 0$ alors $b_n(z) = 1 = b_{n-1}(z)$ donc $\sum_{n\geq 1}|b_n(t)-b_{n-1}(t)| = 0$. Si $r > 0$ alors (en choisissant $r \leq \rho < 2\cos\theta_0$)

$$\sum_{n\geq 1}|b_n(t)-b_{n-1}(t)| = \sum_{n\geq 0}|z|^n\,|1-z| \leq \frac{2\,|1-z|}{1-|z|^2} \leq \frac{2}{2\cos\theta_0-\rho}$$

alors $c = \frac{2}{2\cos\theta_0-\rho} \geq 1$ vérifie aussi $|b_n(z)| \leq 1 \leq c$ pour $z \in T$. Donc la série converge uniformément sur le secteur. Notons en particulier que la série converge uniformément sur $[0,1]$.

Application. — Pour tout $0 < t < 2\pi$, on a $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}$.

La série entière $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nt}{n}z^n$ est de rayon 1 et converge en 1. Pour $0 \leq r < 1$ et $u \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_r(u) = \sum_{n\geq 1}\frac{\sin nt}{n}r^n \quad \text{et} \quad g_r(u) = \arctan\frac{r\sin u}{1-r\cos u}$$

alors

$$f_r'(u) = \operatorname{Re}\frac{re^{iu}}{1-re^{iu}} = \frac{r\cos u - r^2}{1-2r\cos u + r^2} = g_r'(u)$$

or $f_r(0) = g_r(0)$ donc $f_r(u) = g_r(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. D'après le théorème d'Abel, on a donc

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nt}{n} = \lim_{r\to 1^-}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nt}{n}r^n = \lim_{r\to 1^-}\arctan\frac{r\sin t}{1-r\cos t} = \arctan\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

or $\frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \tan(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2})$ et $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi-t}{2} < \frac{\pi}{2}$ donc

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nt}{n} = \arctan\tan\frac{\pi-t}{2} = \frac{\pi-t}{2}.$$

Un autre théorème taubérien. —

Proposition. — *Soit* $(a_n)_n$ *une suite décroissante de réels positifs,* $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ *et* $0 < \alpha < 1$ *alors*

$$a_n \sim \frac{1}{n^\alpha} \iff S_n \sim \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}.$$

Démonstration. — Le sens direct est facile. Réciproquement, posons $\ell = \liminf n^\alpha a_n$ et $L = \limsup n^\alpha a_n$, on considère $\delta > 1$ et $m = [n\delta]$ alors la décroissance de $(a_n)_n$ donne

$$S_m - S_n = a_{n+1} + \cdots + a_m \leq (m-n)a_n \leq (\delta - 1)na_n$$

d'où pour tout $n \geq 1$

$$n^\alpha a_n \geq \frac{1}{\delta-1} n^{\alpha-1}(S_m - S_n) \geq \frac{1}{\delta-1}\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\alpha-1} m^{\alpha-1}S_m - n^{\alpha-1}S_n\right].$$

Puisque $m \sim n\delta$ on a

$$\ell = \liminf n^\alpha a_n \geq \frac{1}{\delta-1}\left[\delta^{\alpha-1}\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right] = \frac{1}{1-\alpha}\frac{\delta^{\alpha-1}-1}{\delta-1}$$

d'où

$$\ell \geq \lim_{\delta\to 1^+} \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha) = 1.$$

On considère maintenant $0 < \delta < 1$ et $m = [n\delta]$ alors

$$S_n - S_m = a_{m+1} + \cdots + a_n \leq (n-m)a_n$$

d'où pour tout $n \geq 1$

$$n^\alpha a_n \leq \frac{1}{1-\frac{m}{n}}\left[n^{\alpha-1}S_n - m^{\alpha-1}S_m\left(\frac{n}{m}\right)^{\alpha-1}\right]$$

d'où

$$L = \limsup n^\alpha a_n \leq \frac{1}{1-\delta}\left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\delta^{1-\alpha}\right] = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1-\delta^{1-\alpha}}{1-\delta}$$

puis

$$L \leq \lim_{\delta\to 1^+} \frac{1}{1-\alpha}\frac{1-\delta^{1-\alpha}}{1-\delta} = \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha) = 1.$$

On a donc $\limsup n^\alpha a_n \leq 1 \leq \liminf n^\alpha a_n$ *i.e.* $a_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$. □

Remarque. — L'hypothèse de décroissance de la suite $(a_n)_n$ est indispensable pour la seconde partie ; il suffit par exemple de poser $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ si $n \geq 2$ est pair et $a_n = 0$ sinon.

Références

X. Gourdon, *Les maths en tête. Analyse*, Ellipses, 1994.

C. Zuily et H. Queffélec, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson, 1995.

DÉVELOPPEMENT 29

THÉORÈME DE TIETZE

Lemme. — *Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont des espaces de Banach. On suppose qu'il existe $0 < \alpha < 1$ et $C < \infty$ tels que, pour tout $y \in F$ vérifiant $\|y\| \leq 1$, il existe $x \in E$ tel que $|x| \leq C$ et $\|y - T(x)\| \leq \alpha$. Alors, pour tout $y \in F$ vérifiant $\|y\| \leq 1$, il existe $x \in E$ tel que $y = T(x)$ et $|x| \leq \frac{C}{1-\alpha}$.*

Démonstration. — On construit par récurrence une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ vérifiant

$$\|x_n\| \leq C \quad \text{et} \quad \|y - T(x_1) - \alpha T(x_2) - \cdots - \alpha n - 1T(x_n)\| \leq \alpha^n.$$

Par hypothèse, x_1 existe. Supposons $x_1, \ldots, x_n$ construits alors

$$\left\| \frac{y - T(x_1) - \alpha T(x_2) - \cdots - \alpha n - 1T(x_n)}{\alpha^n} \right\| \leq 1$$

donc il existe $x_{n+1} \in E$ tel que $|x_{n+1}| \leq C$ et

$$\left\| \frac{y - T(x_1) - \alpha T(x_2) - \cdots - \alpha n - 1T(x_n)}{\alpha^n} - T(x_{n+1}) \right\| \leq \alpha$$

i.e.

$$\|y - T(x_1) - \alpha T(x_2) - \cdots - \alpha n - 1T(x_n) - \alpha^n T(x_{n+1})\| \leq \alpha^{n+1}.$$

On pose alors $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^{n-1} x_n$ (il s'agit d'une série normalement convergente dans l'espace de Banach E donc convergente) alors on a

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^{n-1} \|x_n\| \leq \frac{C}{1-\alpha}$$

et en passant à la limite dans la relation

$$\|y - T(x_1) - \cdots - \alpha n - 1T(x_n)\| \leq \alpha^n$$

on obtient bien $T(x) = y$. □

Théorème. — *Soit Y un fermé d'un espace métrique (X,d) et $g_0 : Y \to \mathbb{R}$ continue. Alors g_0 admet un prolongement continu $f_0 : X \to \mathbb{R}$.*

Démonstration. — On note $\mathcal{C}^0_b(X,\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^0_b(Y,\mathbb{R})$) l'espace des fonctions continues bornées définies sur X (resp. Y) à valeurs réelles muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$ (resp. $\|f\|_\infty = \sup_{y\in Y} |f(y)|$) et on considère l'application "restriction à Y"

$$T : \mathcal{C}^0_b(X,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0_b(Y,\mathbb{R}), f \mapsto f_{|F}.$$

Soit $g \in \mathcal{C}^0_b(Y,\mathbb{R})$ telle que $\|g\|_\infty \leq 1$, on pose

$$Y^+ = \{y \in Y \ ; \ \frac{1}{3} \leq g(y) \leq 1\} \ \text{ et } \ Y^- = \{y \in Y \ ; \ -1 \leq g(y) \leq -\frac{1}{3}\}$$

et

$$f(y) = \frac{1}{3} \frac{d(y, Y^-) - d(y, Y^+)}{d(y, Y^-) + d(y, Y^+)}$$

alors $f \in \mathcal{C}_b^0(X, \mathbb{R})$ et $\|f\|_\infty \leq \frac{1}{3}$. Montrons que $\|T(f) - g\|_\infty \leq \frac{2}{3}$ en distinguant trois cas :
– si $y \in Y^+$ alors $g(y) - f(y) = g(y) - \frac{1}{3} \in [0, \frac{2}{3}]$,
– si $y \in Y^-$ alors $g(y) - f(y) = g(y) + \frac{1}{3} \in [-\frac{2}{3}, 0]$,
– si $y \in Y \setminus (Y^+ \cup Y^-)$ alors $|g(y) - f(y)| \leq |g(y)| + |f(y)| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
On peut appliquer le lemme (avec $\alpha = \frac{1}{3}$ et $C = \frac{2}{3}$) donc, pour tout $g \in \mathcal{C}_b^0(Y, \mathbb{R})$ vérifiant $\|g\|_\infty \leq 1$, il existe $f \in \mathcal{C}_b^0(X, \mathbb{R})$ vérifiant $\|f\|_\infty \leq 1$ et $T(f) = g$.

Supposons maintenant que $g \in \mathcal{C}_b^0(Y, \mathbb{R})$ vérifie $|g(y)| < 1$ pour tout $y \in Y$. D'après ce qui précède, il existe un prolongement h tel que $|h(x)| \leq 1$ pour tout $x \in X$. On veut montrer qu'il existe un prolongement f de g tel que $|f(x)| < 1$ pour tout $x \in X$: c'est fini si $|h(x)| < 1$ pour tout $x \in X$, sinon on pose $f = uh$ où

$$u(x) = \frac{d(x, Z)}{d(x, Y) + d(x, Z} \quad \text{où} \quad Z = \{x \in X ; |h(x)| = 1\}$$

alors f répond bien au problème puisque $u \equiv 1$ sur Y, $|f(x)| \leq |h(x)|$ pour tout $x \in X$ et $f(x) = 0$ si $|h(x)| = 1$.

Pour conclure, on considère un homéomorphisme φ de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ alors $g = \varphi \circ g_0$ admet un prolongement f tel que $|f(x)| < 1$ pour tout $x \in X$ donc $f_0 = \varphi^{-1} \circ f$ prolonge bien g. □

Leçon concernée

07 Prolongements de fonctions. Applications

Référence

H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse*, Dunod, 2002.

DÉVELOPPEMENT 30

FONCTIONS À VARIATION BORNÉE

Pour tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on note $sub([a, b])$ l'ensemble des subdivisions σ de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Si σ est une telle subdivision alors, pour toute application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on note

$$var_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \, .$$

S'il existe $M > 0$ telle que $var_\sigma(f) \leq M$ pour toute subdivision σ de $[a, b]$ alors on dit que f est *à variation bornée* et on note

$$V(f, a, b) = \sup_{\sigma \in sub([a,b])} var_\sigma(f).$$

On suppose dans le lemme suivant que f est à variation bornée sur $[a, b]$.

Lemme. — *Si $[c, d] \subset [a, b]$ alors $f_{|[c,d]}$ est à variation bornée et on note*

$$V(f, c, d) = \sup_{\sigma \in sub([c,d])} var_\sigma(f_{|[c,d]}).$$

De plus, si $a \leq x < y < z \leq b$, alors $V(f, x, y) + V(f, y, z) = V(f, x, z)$.

Démonstration. — Si $\sigma : c = x_0 < x_1 \cdots < x_n = d$ est une subdivision de $[c, d]$ alors

$$\sigma' : a \leq x_0 < x_1 \cdots < x_n \leq b$$

est une subdivision de $[a, b]$ et il vient

$$var_\sigma(f_{[c,d]}) \leq var_{\sigma'}(f) \leq M$$

et cette majoration est valable pour tout $\sigma \in sub([c, d])$ donc $f_{|[c,d]}$ est à variation bornée.

Soit $\sigma_1 : x = x_0 < x_1 \cdots < x_p = y$ une subdivision de $[x, y]$ et $\sigma_2 : y = y_0 < y_1 \cdots < y_q = z$ est une subdivision de $[y, z]$ alors, on obtient naturellement une subdivision σ de $[x, z]$ en concaténant σ_1 et σ_2, d'où

$$var_{\sigma)_1}(f) + var_{\sigma_2}(f) = var_\sigma(f) \leq V(f, x, z)$$

et cette majoration est valable pour tout $\sigma_1 \in sub([x, y])$ et pour tout $\sigma_2 \in sub([y, z])$ donc

$$V(f, x, y) + V(f, y, z) \leq V(f, x, z).$$

Réciproquement, si σ est une subdivision de $[x, z]$ alors, quitte à ajouter le point y, on a naturellement une subdivision σ' de $[x, z]$ vérifiant $var_\sigma(f) \leq var_{\sigma'}(f)$. Si σ' est de la forme $x = x_0 < x_1 \cdots < x_p = y < y_1 < \cdots < y_q = z$, on note $\sigma_1 : x = x_0 < x_1 \cdots < x_p = y$ et $\sigma_2 : y = y_0 < y_1 < \cdots < y_q = z$ de sorte que

$$var_\sigma(f) \leq var_{\sigma'}(f) = var_{\sigma_1}(f) + var_{\sigma_2}(f) \leq V(f, x, y) + V(f, y, z)$$

or cette inégalité est vraie pour toute subdivision σ de $[x, z]$ donc $V(f, x, z) \leq V(f, x, y) + V(f, y, z)$. □

Proposition. — *Si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors g est à variation bornée et*

$$V(g,a,b) = \int_a^b \left|g'(t)\right| dt.$$

Démonstration. — Soit $\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ alors, pour tout k, on a

$$|g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} g'(t)dt\right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|g'(t)\right| dt$$

d'où $var_\sigma(g) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leq \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|g'(t)\right| dt = \int_a^b \left|g'(t)\right| dt$ et cette relation est vraie pour toute subdivision σ de $[a,b]$ donc g est à variation bornée et $V(g,a,b) \leq \displaystyle\int_a^b \left|g'(t)\right| dt.$

Soit $\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ alors le théorème des accroissements finis permet d'écrire $g(x_{k+1}) - g(x_k) = (x_{k+1} - x_k)g'(\theta_k)$, avec $x_k < \theta_k < x_{k+1}$, de sorte que

$$var_\sigma(g) = \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \left|g'(\theta_k)\right|.$$

Cette dernière expression est une somme de Riemann pour la fonction $|g'|$, relativement à la subdivision σ pointée aux θ_k, donc $var_\sigma(g) \xrightarrow[|\sigma|\to 0]{} \displaystyle\int_a^b \left|g'(t)\right| dt$ où $|\sigma|$ représente le pas de la subdivision σ, d'où $V(g,a,b) \geq \displaystyle\int_a^b \left|g'(t)\right| dt.$ □

Proposition. — *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est à variation bornée si et seulement s'il existe $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ croissantes telles que $f = g - h$.*

Démonstration. — Si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est croissante alors, pour toute subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$, on a

$$var_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a)$$

donc φ est à variation bornée. Puisque la différence de deux fonctions à variation bornée est aussi à variation bornée, on obtient la condition suffisante.

Réciproquement, on considère l'application $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = V(f,a,x)$. Le deuxième lemme assure que la fonction g est croissante. On pose $h = g - f$ alors, pour $x < y$, on a

$$h(y) - h(x) = g(y) - g(x) - (f(y) - f(x)) = V(f,x,y) - (f(y) - f(x)) \geq 0$$

(car $x < y$ est une partition de $[x,y]$) donc h est croissante et $f = g - h$ est bien la différence de deux fonctions croissantes. □

Exemple. — La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ est continue mais n'est pas à variation bornée.

Démonstration. — On considère la subdivision suivante de $[0,1]$:

$$\sigma_n \ : \ 0 < \frac{1}{n\pi} < \frac{1}{(n-1)\pi} < \cdots < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{\pi} < 1$$

alors

$$Var_{\sigma_n}(f) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \left| f\left(\frac{1}{(k+1)\pi}\right) - f\left(\frac{1}{k\pi}\right) \right| \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\cos(k+1)\pi}{(k+1)\pi} - \frac{\cos k\pi}{k\pi} \right|$$

donc

$$Var_{\sigma_n}(f) \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k+1}$$

or la série $\sum \frac{1}{k+1}$ diverge donc f n'est pas à variation bornée. $\square$

Leçons concernées

18 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

32 Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables

Référence

X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

DÉVELOPPEMENT 31

PROLONGEMENT DE LA FONCTION ζ DE RIEMANN

On pose $\theta(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi m^2 t}$ pour $t > 0$ et on admet l'équation fonctionnelle $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right)$.

Théorème. — *La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}-\{1\}$ et admettant un pôle simple en 1.*

Démonstration. — Soit s tel que $\sigma = \mathrm{Re}\ s > 1$ alors

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\frac{s}{2}-1}dx = \pi^{\frac{s}{2}}n^s\int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y}y^{\frac{s}{2}-1}dy$$

donc

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = \pi^{\frac{s}{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y}y^{\frac{s}{2}-1}dy.$$

On considère pout $t > 0$ la fonction

$$\widetilde{\theta}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{2}\left(\theta(t)-1\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}\widetilde{\theta}\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2}.$$

La suite $(f_N)_N$ de fonctions définie pour $y \geq 0$ par

$$f_N(y) = \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi n^2 y}y^{\frac{s}{2}-1}$$

converge simplement vers la fonction $y \mapsto \widetilde{\theta}(y)y^{\frac{s}{2}-1}$ et on a

$$|f_N(y)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 y}y^{\frac{\sigma}{2}-1} = g(y).$$

Or d'après le théorème de Fubini on a

$$\int_0^{+\infty} g(y)dy = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y}y^{\frac{\sigma}{2}-1}dy = \frac{\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\pi^{\frac{\sigma}{2}}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\sigma} < \infty$$

i.e. $g \in L^1$ et, d'après le théoème de Lebesgue, on a

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = \pi^{\frac{s}{2}}\int_0^{+\infty}\widetilde{\theta}(y)y^{\frac{s}{2}-1}dy.$$

Or

$$\int_0^1 \widetilde{\theta}(y)y^{\frac{s}{2}-1}dy = \int_0^1 \widetilde{\theta}\left(\frac{1}{y}\right)y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}dy + \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}dy - \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{s}{2}-1}dy$$

i.e.

$$\int_0^1 \widetilde{\theta}(y)y^{\frac{s}{2}-1}dy = \int_1^{+\infty}\widetilde{\theta}(u)u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}du + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

d'où
$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right) + \pi^{\frac{s}{2}}\int_1^{+\infty}\widetilde{\theta}(y)\left(y^{\frac{s}{2}-1}+y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)dy.$$
Pour tout $y \geq 1$, l'application
$$s \mapsto \widetilde{\theta}(y)\left(y^{\frac{s}{2}-1}+y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)$$
est holomorphe dans $\mathbb{C}$. D'autre part on a pour $y \geq 1$
$$\widetilde{\theta}(y) = \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 y} \leq \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n y} = \frac{e^{-\pi y}}{1-e^{-\pi y}} \leq \frac{e^{-\pi y}}{1-e^{-\pi}}$$
donc, si s est dans un compact de $\mathbb{C}$ *i.e.* si $-\infty < a \leq \operatorname{Re} s \leq b < +\infty$ alors
$$\left|\widetilde{\theta}(y)\left(y^{\frac{s}{2}-1}+y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\right| \leq \frac{e^{-\pi y}}{1-e^{-\pi}}\left(y^{\frac{b}{2}-1}+y^{-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}}\right)$$
donc l'application
$$\psi : s \mapsto \pi^{\frac{s}{2}}\int_1^{+\infty}\widetilde{\theta}(y)\left(y^{\frac{s}{2}-1}+y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)dy$$
est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Ainsi, on a
$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right) + \psi(s)$$
or la fonction Γ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, ne s'annule pas, a pour pôles simples les entiers négatifs et la fonction $\frac{1}{\Gamma}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc la fonction ζ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et admet au plus un pôle simple en 0 et en 1. Or Γ admet un pôle simple en 0 donc ζ n'admet pas 0 pour pôle. □

Leçons concernées

07 Prolongements de fonctions. Applications

29 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples

34 Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications

38 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications

39 Transformation de Fourier et produit de convolution

40 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

41 Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries

44 Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications

45 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$

47 Exemples de problèmes d'interversion de limites

Compléments

Résidu en 1. —
Pour Re $s > 1$, on a

$$\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2(s-1)\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}=\frac{1}{s-1}\left(\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}+(s-1)\phi(s)\right)$$

avec ϕ holomorphe sur $\mathbb{C}$. Or $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}$ donc

$$\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s-1}\left(1+(s-1)\phi(s)\right)=\frac{1}{s-1}+\phi(s).$$

On a donc en fait

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\eta(s)$$

avec η holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Équation fonctionnelle vérifiée par ζ. —
Pour tout s, on pose

$$\xi(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

i.e. d'après ce qui précède

$$\xi(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}+\int_1^{+\infty}\widetilde{\theta}(y)\left(y^{\frac{s}{2}-1}+y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)dy.$$

On a donc

$$\xi(1-s)=\frac{1}{(1-s)-1}-\frac{1}{1-s}+\int_1^{+\infty}\widetilde{\theta}(y)\left(y^{\frac{1-s}{2}-1}+y^{-\frac{1-s}{2}-\frac{1}{2}}\right)dy$$

i.e.

$$\xi(1-s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}+\int_1^{+\infty}\widetilde{\theta}(y)\left(y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+y^{\frac{s}{2}-1}\right)dy$$

et on obtient donc $\xi(s)=\xi(1-s)$ *i.e.*

$$\zeta(s)=\pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s).$$

Autour de la fonction Γ. —
Pour $x > 0$, on a en appliquant le théorème de convergence monotone

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt=\lim_{n\to+\infty}n^x\int_0^n s^{x-1}(1-s)^n\,ds.$$

Or on montre aisément par récurrence que pour tout $n \geq 1$ et tout $x > 0$

$$\int_0^n s^{x-1}(1-s)^n\,ds=\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

d'où

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x n!}.$$

On pose

$$G(z)=\lim_{n\to+\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{(n+1)^z n!}=\lim_{n\to+\infty}G_n(z)$$

ainsi

$$G_n(z)=\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{(n+1)^z n!}=z\prod_{k=1}^n f_k(z)\text{ où }f_k(z)=\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}.$$

Si $|z| \leq R$ et $k > R$ alors $\frac{|z|}{k} < 1$ donc

$$f_k(z)=\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}=e^{\log\left(1+\frac{z}{k}\right)-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

et il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{R<k\leq n} f_k(z)$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Ainsi la suite de fonctions holomorphes G_n converge-t-elle uniformément sur les compacts vers la fonction G *i.e.* G est holomorphe et s'annule aux points annulant les G_n. Donc la fonction $\frac{1}{\Gamma}$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ et s'annule aux entiers négatifs.

Il n'y a aucun zéro dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}\ s \geq 1\}$. —
Si Re $s > 1$ alors on peut écrire pour tout premier p

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{p^{ks}}$$

donc, en notant $(p_i)_i$ la suite croissante des nombre premiers, on a

$$\prod_{i=1}^{A}\frac{1}{1-p_i^{-s}} = \prod_{i=1}^{A}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_i^{ks}} = \sum_{k_1,\dots,k_A\geq 1}\frac{1}{(p_1^{k_1}\cdots p_A^{k_A})^s} = \sum_{n\in N_A}\frac{1}{n^s}$$

où N_A est l'ensemble des entiers admettant exactement $p_1,\dots,p_A$ comme facteurs premiers. Or $n \leq p_A$ implique que $n \notin N_A$ donc

$$\left|\sum_{n\in N_A}\frac{1}{n^s} - \sum_{n\leq p_A}\frac{1}{n^s}\right| \leq \sum_{n>p_A}\frac{1}{n^s} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

donc pour Re $s > 1$ on a

$$\zeta(s) = \prod_{p\ premier}\frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Si Re $s > 1$ alors $\prod_{p\ premier}(1-p^{-s})$ est un nombre complexe que l'on note $\psi(s)$ donc

$$\psi(s)\ \zeta(s) = \prod_{p\ premier}(1-p^{-s})\prod_{p\ premier}\frac{1}{1-p^{-s}} = 1$$

donc $\zeta(s) \neq 0$ *i.e.* la fonction ζ ne s'annule pas dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}\ s \geq 1\}$.

Les zéros de la fonction ζ sont de deux types. —
Puisque $\zeta(s) \neq 0$ pour Re $(s) > 1$, on a $\zeta(1-s) \neq 0$ pour Re $(s) < 0$. D'autre part la fonction Γ ne s'annule pas et admet des pôles simples aux entiers négatifs, il résulte donc de l'égalité

$$\zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s)$$

que les zéros de ζ dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}\ s < 0\}$ sont les entiers $-2,-4,-6,\dots$. Ainsi, les zéros de la fonction ζ sont de deux types : les entiers négatifs pairs et les éventuels zéros situés dans la *bande critique* $\{0 \leq \mathrm{Re}\ s \leq 1\}$.

Références

A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse 1*, Masson, 2è éd., 1997.

A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 2*, Dunod, 1999.

C. Zuily et H. Queffélec, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson, 1995.