Exercice 1 (6 points)

1- Soit Δ une droite, F un point n'appartenant pas à Δ et $e > 0$.
Comment s'appelle la courbe du plan constituée de l'ensemble des points M tels que $\dfrac{MF}{MH} = e$ (où H est la projection orthogonale de M sur Δ) dans chacun des cas suivants ?

(a) Si $e < 1$. **Ellipse**

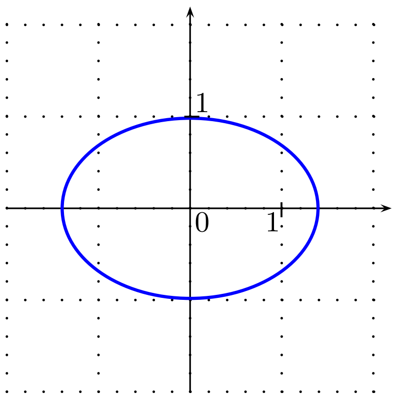
(b) Si $e = 1$. **Parabole**

(c) Si $e > 1$. **Hyperbole**

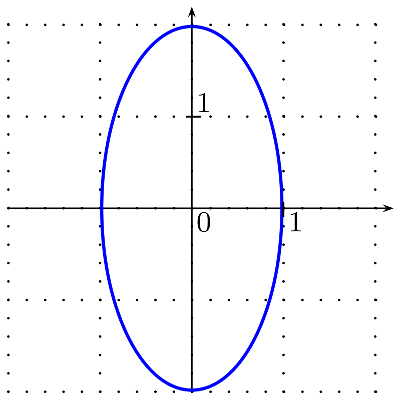
2- Parmi les quatre équations suivantes

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \ , \quad 4x^2 + y^2 = 4 \ , \quad \frac{x^2}{\sqrt{2}} - y^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \ ,$$

indiquer celles qui correspondent aux courbes ci-dessous :

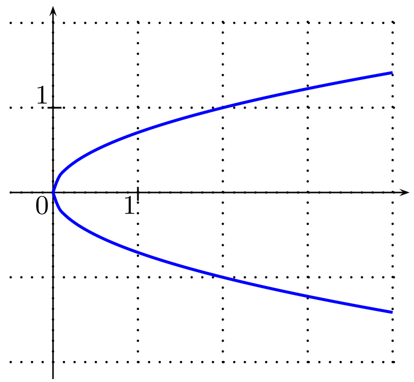


$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

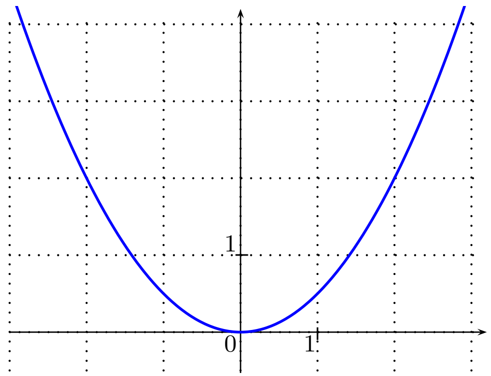


$$4x^2 + y^2 = 4$$

3- Indiquer les équations des paraboles représentées ci-dessous.

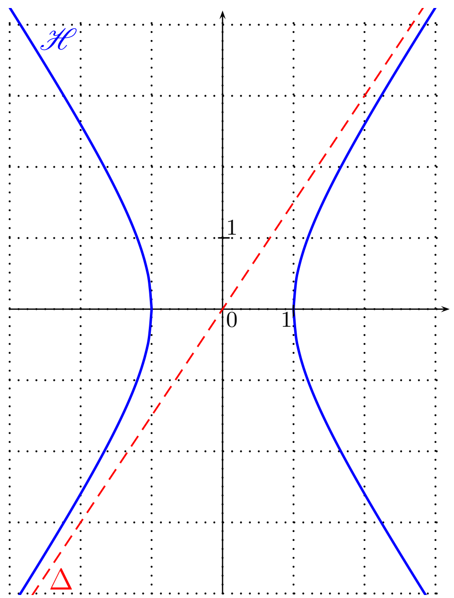


$$x = 2y^2$$



$$y = \frac{1}{2}x^2$$

4- On considère l'hyperbole $\mathscr{H}$ représentée ci-contre et dont la droite Δ est une asymptote.



(a) Quelle est l'équation de Δ ?

$$y = \frac{3}{2}x$$

(b) Quelle est l'équation de $\mathscr{H}$?

$$x^2 - \frac{4}{9}y^2 = 1$$

Exercice 2 (6 points)

On pose $f(x,y)=\sqrt{xy}$.

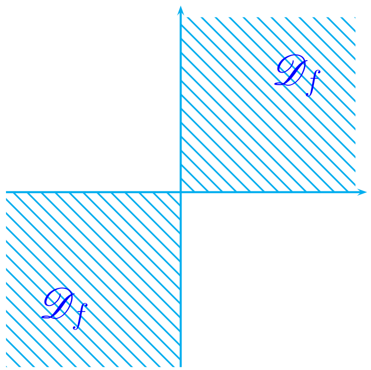
1- Quel est le domaine de définition de f ?

2- Calculer les dérivées partielles premières de f.

3- Calculer les dérivées partielles secondes de f.

1- On note $\mathscr{D}_f$ le domaine de définition de f. La racine carrée n'est définie que pour les nombres réels positifs ou nuls donc

$$\begin{aligned}(x,y)\in\mathscr{D}_f &\Longleftrightarrow xy\geqslant 0\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases}x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x\leqslant 0\\ y\leqslant 0\end{cases}.\end{aligned}$$



Donc $\mathscr{D}_f=\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\right)\cup\left(\mathbb{R}^-\cup\mathbb{R}^-\right)$.

2- On rappelle que si $\varphi(t)=\sqrt{u(t)}$ alors $\varphi'(t)=\dfrac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}$.

On en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y}{2\sqrt{xy}} \quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x}{2\sqrt{xy}}.$$

Comme la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0, les réels x et y sont supposés tous deux non nuls.

Notons que si $x>0$ et $y>0$, on peut simplifier ces écritures

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}.$$

3- On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{y}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}$ donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{y}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)y(xy)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{y^2}{4}(xy)^{-\frac{3}{2}}.$$

De même, on obtient : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-\dfrac{x^2}{4}(xy)^{-\frac{3}{2}}$.

Enfin, on a

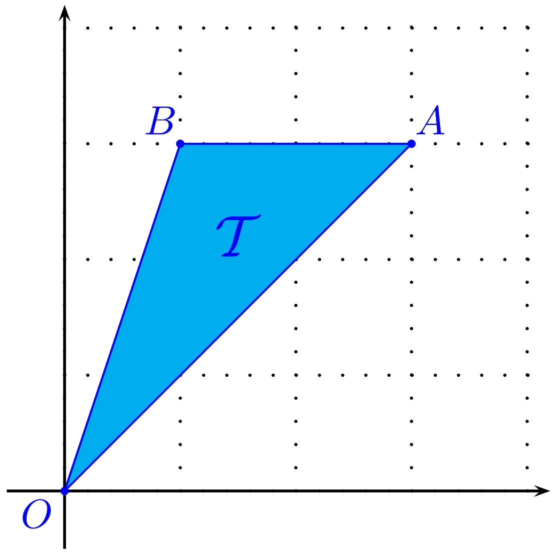
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)&=\frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)x(xy)^{-\frac{3}{2}}\\ &=\frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}-\frac{xy}{4}(xy)^{-\frac{3}{2}}\\ &=\frac{xy}{4(xy)^{\frac{3}{2}}}\\ &=\frac{1}{4\sqrt{xy}}.\end{aligned}$$

Exercice 3 (4 points)

On considère les points A et B du plan de coordonnées respectives $(3;3)$ et $(1;3)$ et on note $\mathcal{T}$ la partie du plan intérieure au triangle OAB.

1- Quelle est l'aire de $\mathcal{T}$?

2- Calculer l'abscisse du centre d'inertie d'une plaque homogène de forme $\mathcal{T}$.



1- Si on note K le point de coordonnées $(0;3)$ alors $[OK]$ est la hauteur correspondant à la base $[AB]$ du triangle OAB. Comme les segments $[OK]$ et $[AB]$ mesurent respectivement 3 et 2 unités de longueur, l'aire $\mathscr{A}$ de $\mathcal{T}$ est de 3 unités d'aire.

2- On note G le centre d'inertie et x_G son abscisse alors :

$$x_G = \frac{1}{\mathscr{A}} \iint_{\mathcal{T}} x \; dx \; dy.$$

Les droites OA et OB admet respectivement pour équation $y = x$ et $y = 3x$ donc le domaine $\mathcal{T}$ est caractérisé par les inégalités suivantes :

$$0 \leqslant y \leqslant 3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}y \leqslant x \leqslant y.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{T}} x \; dx \; dy &= \int_0^3 \left(\int_{\frac{1}{3}y}^{y} x \; dx \right) dy \\
&= \int_0^3 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\frac{1}{3}y}^{y} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^3 \left(y^2 - \frac{1}{9} y^2 \right) dy \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{8}{9} \times \int_0^3 y^2 \; dy \\
&= \frac{4}{9} \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^3 \\
&= 4
\end{aligned}$$

d'où

$$x_G = \frac{1}{\mathscr{A}} \iint_{\mathcal{T}} x \; dx \; dy = \frac{4}{3}.$$

Exercice 4 (4 points)

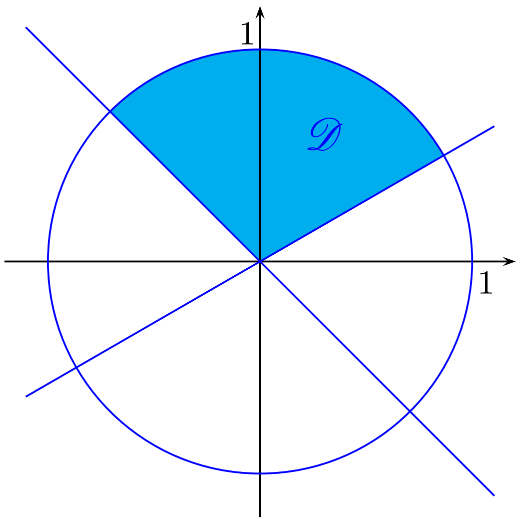
On pose $\mathscr{D} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x^2+y^2\leqslant 1\ ,\ x+y\geqslant 0 \text{ et } \sqrt{3}\,y-x\geqslant 0\right\}$.
En passant en coordonnées polaires, calculer :

$$I = \iint_{\mathscr{D}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

On commence par reconnaître les équations intervenant dans la définition du domaine $\mathscr{D}$:

- l'équation $x^2+y^2=1$ est celle du cercle centré en l'origine et de rayon 1 ;
- l'équation $x+y=0$ est celle de la droite passant par l'origine et par le point de coordonnées $(-1,1)$;
- l'équation $\sqrt{3}\,y-x=0$ est celle de la droite passant par l'origine et par le point de coordonnées $\left(1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Le domaine $\mathscr{D}$ est donc celui représenté ci-dessous :



En coordonnées polaires ce domaine est caractérisé par les inégalités suivantes :

$$0\leqslant r\leqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}.$$

Si on note $\Delta=[0,1]\times\left[\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right]$ alors

$$I = \iint_{\mathscr{D}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{\Delta} \frac{1}{1+r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

d'où

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr\right)d\theta \\
&= \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta\right)\times\left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr\right) \\
&= \left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\times\left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr\right) \\
&= \frac{7\pi}{12}\times\left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1
\end{aligned}$$

donc $I=\dfrac{7\pi\ln(2)}{24}$.