Exercice 1

Calculer les dérivées des fonctions f données ci-dessous (sans se soucier du domaine de dérivabilité) :

- $f(x) = \cos(3x)$;
- $f(x) = \sin(2x+1)$;
- $f(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$;
- $f(x) = \dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$;
- $f(x) = \cos(3x) - 4\cos^3(x) + 3\cos(x)$.

Exercice 2

Écrire les expressions suivantes sous la forme d'un seul cosinus :

- $\cos(x) + \sin(x)$;
- $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x)$;
- $3\cos(5x) + \sqrt{3}\sin(5x)$.

Exercice 3

On pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ où $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Montrer que l'on a :

$$\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Exercice 4

Calculer les dérivées des expressions ci-dessous :

- $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$;
- $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$;
- $f(x) = \sin\left(\operatorname{Arctan} x\right)$;

Exercice 5

Étudier les fonctions f définies ci-dessous :

- $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}\right)$;
- $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$;
- $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)$;

Exercice 6

On pose $h = f - g$ avec

$$f :]-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$$

$$g :]-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

1- Calculer les dérivées des fonctions f et g.

2- En déduire une expression simplifiée de la fonction h sur l'intervalle $]-1,0[$ et une expression simplifiée de h sur l'intervalle $]0,1[$.

3- Donner l'allure du graphe de h.

Exercice 7 (fonction sinus hyperbolique)

On considère la fonction

$$\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(a) Étudier sh sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que sh est bijective sur $\mathbb{R}$.

(c) Déterminer l'application réciproque, notée Argsh, de sh.

(d) Quelles sont les variations de Argsh ? Quelle est sa dérivée ?

Exercice 8 (fonction cosinus hyperbolique)

On considère la fonction

$$\operatorname{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(a) Étudier ch sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que ch est bijective sur $[0,+\infty[$.

(c) Déterminer l'application réciproque, notée Argch, de la restriction de ch à $[0,+\infty[$.

(d) Quelles sont les variations de Argch ? Quelle est sa dérivée ?

Exercice 9 (fonction tangente hyperbolique)

On considère la fonction

$$\operatorname{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(a) Étudier th sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que th est bijective sur $\mathbb{R}$.

(c) On note Argth l'application réciproque de th. Quelles sont les variations de Argth ? Quelle est sa dérivée ?

(d) On considère la fonction

$$g :]-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Calculer la dérivée de g.

(e) En déduire une expression explicite de la fonction Argth.